

整数の分割

ジョージ・アンドリュース，キムモ・エリクソン 著
佐藤文広 訳

INTEGER PARTITIONS

by George W. Andrews, Kimmo Eriksson

数学書房

整数の分割

ジョージ・アンドリュース，キムモ・エリクソン 著
佐藤文広 訳

INTEGER PARTITIONS

by George W. Andrews, Kimmo Eriksson

数学書房

まえがき

これは整数の分割についての書物である．これまで整数の分割ということを聞いたことがなかったとしても，それがどういう意味かすぐ理解できるだろう．例えば，3 を正整数の和に分割するとして，何通りの分割が可能だろうか．まず，$3 = 3$ である．次に $3 = 2 + 1$ であり，また $3 = 1 + 1 + 1$ でもある．このまったく初等数学的な考察から，答えは「3 の分割は 3 通りある」となる．

整数の分割の理論について書かれた文献は，これまで，すべて数学の専門家向けのものであった．だが，整数の分割とは何かを知ってみれば，数学の進んだ知識がなくともその研究ができるはずだという，われわれ著者の意見に同感してもらえると思う．本書は，その欠落を埋めるために書かれたのである．

整数の分割の研究は多くの偉大な数学者を魅了してきた．ちょっと考えるだけでも，オイラー，ルジャンドル，ラマヌジャン，ハーディ，ラーデマッハー，シルベスター，セルバーグ，そしてダイソン等の名が挙がる．彼らはみな，このじつに単純な数学的対象についての高等な理論の発展に貢献した．本書では，予備知識 0 からスタートし，まったく簡単な題材から未解決の問題にまで読者を一歩一歩導いていくつもりである．取り上げる話題は，このテーマの核心部分にストレートに到達できるように考えて選択されている．われわれは，整数の分割の全理論の中でも最高の驚異的な結果の 1 つであるロジャース–ラマヌジャン恒等式にすみやかにたどり着けるようにした．次いで，整数の分割のさまざまな魅力的な側面に触れるために必要な母関数の知識を与える．

本書は幅広い読者層を意識している．当然，整数の分割についての学部学生向け講義の理想的教科書となることが望ましい．そこで，話題を 1 学期間の講義に適当な分量にとどめ，手ごろな長さの本となるように努めた．また，高度な数学の教育を受けてはいないが数学への興味を抱いている多くの人々にとっても，ぴったり合ったものとなることを希望している．最後に，基礎的な数学

の知識さえあればどんな人にとっても，本書は整数の分割へのしっかりとした入門書となると思う．

本書の記述を読みやすくし，さらに読み進めたくなるようにと，議論の多くを省いて節末の演習問題に回すことにした．巻末には，多くの演習問題の解，または，ヒントがのせてある．演習問題の難易度はいろいろである．演習問題に何を期待すべきかを知らせるために，以下の基準に従って難易度の評価が記してある．

難易度： 1　容易，　2　多少は工夫を要する，　3　挑戦的課題．

本書の企画は，われわれが 2000 年にフィラデルフィアで開かれた研究集会で出合ったときに始まった．それ以来，執筆はスウェーデンとアメリカの間での手紙や電子メールのやり取りによって行われた．われわれは，多くの人々から受けた手助けに感謝を述べたい．アート・ベンジャミン，カール・ヤーガーは，原稿をすべて読んで多くの間違いを見つけ出し，有益な助言を与えてくれた．キャシー・ウィーラントはペンステート[1]で原稿の入力をしてくれた．ブラント・クロンホルム，ジェームズ・セラーズ，イ・エジャは校正刷のチェックをしてくれた．ケンブリッジ大学出版局は，注意に満ちた編集上のアドバイスを与えてくれた．ジム・プロップは第 11 章に関して広範な有益なコメントを寄せてくれた．

ジョージ・アンドリュース
キムモ・エリクソン

日本語版に寄せて

私たちの本『整数の分割』が日本の読者に届けられることは，大きな喜びです．訳者の綿密な仕事によって，日本語版では多数のミスプリントが訂正されたことに感謝します．

G.A.
K.E.

---

[1]ペンシルバニア州立大学のこと．著者アンドリュースの所属大学．

目 次

第1章

プロローグ

数学は，1万年もの時をかけて発展してきた人類の一大事業である．岩石に刻まれた記録から，小さな数を数えたり加え合わせたりすることは，先史時代の人々に知られていたことがうかがえる．後に，古代ギリシアで，有理数の概念，幾何学，数学的証明という考えなどが生み出された．アラブや中国の数学者は，便利な位取り記数法や，未知数の計算，すなわち，代数の基礎を発展させた．ルネサンス以降，数学の発展のペースは加速され，解析幾何学，微分積分法，論理と集合論など，計り知れぬほど有用な進歩がなされ，ついには現在展開されている，数学とコンピュータとの互いに支えあう実り豊かな共同事業にまで発展した．

われわれは，このような現代的発展の多くに，深く分け入るとまでは言えないかもしれないが，少なくとも触れることになる．しかし，じつのところ，本書で述べられる数学的主張は，先史時代人にさえ意味が分かるような類のものなのである．岩石に刻まれた線画でも，洞窟壁画でもよいが，次のような絵が描かれていたと想像してみよう．

```
O_ _               O_ _ O_ _
 | |                | |  | |
O_ _
 | |
```

```
0_ _                      0_ _ 0_ _ 0_ _
 | |                       | |  | |  | |
0_ _
 | |
0_ _
 | |

0_ _ 0_ _ 0_ _            0_ _ 0_ _
 | |  | |  | |             | |  | |
                          0_ _
                           | |

0_ _                      0_ _ 0_ _ 0_ _ 0_ _
 | |                       | |  | |  | |  | |
0_ _
 | |
0_ _
 | |
0_ _
 | |

0_ _ 0_ _ 0_ _            0_ _ 0_ _ 0_ _
 | |  | |  | |             | |  | |  | |
0_ _                      0_ _
 | |                       | |
```

ここに含まれている概念は，小さな数，数の相等，数の加法，偶数と奇数の区別だけである．これらの絵が示しているものは，4 頭までの動物を，奇数頭からなる行[1]に並べるやり方と異なる長さの行に並べるやり方とが同数だということである．今ならば，岩に刻み込む代わりに黒板にもっと分かりやすい表として書くことができる．

---

[1]本書では線型代数の行列の場合と同様に，横の並びを行，縦の並びを列とよぶことにする．

1 + 1	2
1 + 1 + 1 3	3 2 + 1
1 + 1 + 1 + 1 3 + 1	4 3 + 1

左の列[1)]に現れる分け方と右の列に現れる分け方とがつねに同数であるという事実は，1748 年にレオンハルト・オイラーによって最初に証明された．しかし，ここには，人類が石器時代から知っていたような知識以上に高級な数学は関係していないのだから，小さな数に対してこの現象に気づいた人間がもっと以前にいたということも，十分考えられることである．今日では，3 + 1 とか 5 + 5 + 3 + 2 のような対象を**整数の分割**という．別の言い方をすると，整数の分割とは，1 つの正整数をいくつかの正整数 (**和因子**，または，**部分**とよぶ) の和に分ける仕方のことである．和因子の順番を入れ替えても，同じ分割を表すものとする．したがって，分割を表すときは，大きい和因子から小さい和因子へと順に並べることにしよう．

さて，オイラーの驚くべき結果を正確に述べると次のようになる．

> 任意の正整数について，奇数和因子への分割と相異なる和因子への分割とは，同じ数だけ存在する．

先の表を，5, 6 に対して延長してみる．

1 + 1 + 1 + 1 + 1 3 + 1 + 1 5	5 4 + 1 3 + 2
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 3 + 1 + 1 + 1 3 + 3 5 + 1	6 5 + 1 4 + 2 3 + 2 + 1

演習問題

1. 上の表を 7 から 10 まで延長し，オイラーが正しかったことを自分で確かめてみよ．この 2 種類の分割がいつも同じ数だけ存在するのはなぜか，何か気がつかないだろうか．(難易度：1)

「任意の正整数に対し，ある種の分割と別の種の分割とが同数存在する」というような主張を**分割恒等式**という．上のオイラーによる分割恒等式がその最初のものであるが，まだまだいくらでも存在するのである．多くの想像もできないような分割恒等式がいろいろあって，われわれの興味をかきたててくれる．もう 1 つ有名な例を挙げよう．

> 任意の正整数に対し，$1, 4, 6, 9, 11, 14, \cdots$ を和因子とするような分割と各和因子の差が少なくとも 2 あるような分割とは同じ数だけ存在する．

数列 $1, 4, 6, 9, 11, 14, \cdots$ は，1 の位が $1, 4, 6, 9$ となる数の列である．5 で割ったとき余りが 1 または 4 となる数の列ということもできる．余りの計算は**合同式計算**といわれ，本書でも何度か登場するであろう．分割恒等式が，証明においてもその結果においても，初等数学から高度な数学にいたるじつに広い分野，さらには現代物理学までも，と関係することは，目を見張らせる事実である．著者としては，読者に整数の分割の持つ抑えがたい魅力を知ってもらい，関連領域についてもさらに学んでいきたいという誘惑に駆られるようになることを望んでいる．

すぐ上で紹介した分割恒等式は，1894 年にレオナード・ジェームズ・ロジャースにより，また彼とは独立に 1913 年にスリニバサ・ラマヌジャンにより発見された．この恒等式については，人間味あふれる物語が豊富にある．例えば，ロジャースはあまり知られていない数学者であったのだが，驚異の天才ラマヌジャンが彼の結果を 20 年後に再発見し，それによってロジャースも (少なくとも数学者の間では) 不朽の名声を手に入れることになったのである．整数の分割という分野が成長していく過程で，人生の物語や逸話が数多く生まれた．ロマン

チックなものであったり，驚嘆すべきものであったり，ただの笑い話であったりいろいろだが，いずれにせよそれらは，数学そのものと結びつけて語られてこそ，もっとも深く味わうことができるだろう．

整数の分割の魅惑の世界にようこそ！

第 2 章

オイラー，そしてオイラーを超えて

この章では，オイラーの恒等式 (やその仲間) がどのようにして全単射法で証明できるのかを説明する．全単射法はエレガントであり理解するのも容易だが，オイラー自身が用いた方法ではない．オイラーは**母関数**とよばれる解析的道具を用いた．母関数は強力ではあるが，多少数学に習熟している必要があるので，オイラーの方法には第 5 章で立ち戻ることにしよう．

この章のポイント

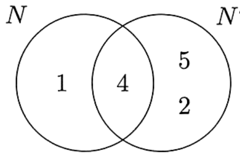
- 集合論の基礎を学ぶ：合併，共通部分，集合の基数．
- 全単射 (2 つの集合の間の 1 対 1 対応) を用いて恒等式を証明する方法が説明される．
- オイラーの恒等式 (相異なる和因子への分割の個数は奇数和因子への分割の個数に等しいこと) の全単射法による証明が，等しい和因子の融合，その逆操作である偶数和因子の等分という方法を用いて与えられる．
- オイラーの恒等式が,「オイラーペア」(すなわち，整数の集合 M と N で，整数の M に属す相異なる和因子への分割の個数と N に属す和因子への分割の個数とが等しくなるようなもの) に一般化される．

2.1 集合論の用語

われわれは集合論の基本的な概念を必要とする．まず，**集合**とは相互に区別できる対象の集まりであり，その対象は通常**元**とよばれる．集合は，その元を中括弧 $\{\ \}$ の間にリストアップすることで表すことができる．例えば，$\{1,2,4,5\}$ は 4 個の元からなる集合で，その元はすべて整数である．記憶にとどめておくべきことは，リストに現れる順序はどうでもよいということである．したがって，$\{4,5,2,1\}$ と $\{1,2,4,5\}$ は同じ集合を表している．

集合の元のうちのいくつかを取り除いて，残りだけを考えると，**部分集合**が得られる．記号 $\subset$ で部分集合であることを表す．例えば，$\{2,5\} \subset \{1,2,4,5\}$ である．

2 つの集合 N と N' の**共通部分**とは，どちらの集合にも共通に属している元がつくる集合のことであり，$N \cap N'$ と表される．共通の元が存在しない，すなわち，共通部分が空のとき，2 つの集合は**互いに素**といわれる．2 つの集合 N と N' の**合併** (**和集合**ともいう) とは，それらの集合のどちらか，または，両方に属している元をすべて含む集合のことであり，$N \cup N'$ と表される．$N = \{1,4\}$, $N' = \{2,4,5\}$ だとしよう．このとき，その共通部分は $N \cap N' = \{4\}$ でその合併は $N \cup N' = \{1,2,4,5\}$ である．共通部分や合併を表すには，次のような**ベン図**を用いると便利である．



集合 N に含まれる元の個数を $|N|$ と記し，その集合の**基数** (または簡単に**サイズ**) という．

演習問題

2. 上の例では，$|N| = 2$, $|N'| = 3$, $|N \cap N'| = 1$, $|N \cup N'| = 4$ である．こ

こで $2+3=4+1$ となっているのは偶然の一致ではない．実際，任意の集合 N, N' に対して $|N|+|N'|=|N \cup N'|+|N \cap N'|$ が成り立つのだが，なぜだろうか．2 つの集合の合併のサイズがそれぞれの集合のサイズの和に等しくなるための必要十分条件は，その 2 つの集合が互いに素であることである．このことを導け．(難易度：1)

2.2　分割恒等式の全単射法による証明

分割恒等式を正確かつ簡潔に定式化するために，記号を少しばかり導入しよう．$p(n)$ で，与えられた整数 n の分割の総数を表す．関数 $p(n)$ を**分割関数**という．例えば，4 の分割は

$$4, \quad 3+1, \quad 2+2, \quad 2+1+1, \quad 1+1+1+1$$

の 5 つだから，$p(4)=5$ である．分割恒等式では，しばしば，ある一定の条件を満たす分割の個数について興味がもたれる．そのような分割の個数を $p(n \mid \text{条件})$ のように表す．オイラーの恒等式ならば，

$$p(n \mid \text{和因子は奇数}) = p(n \mid \text{和因子は相異なる}) \quad (n \geq 1) \tag{2.1}$$

と表すことができる．

さて，このような恒等式をどうしたら証明できるかちょっと考えてみよう．個々の n の値についてなら，両方の種類の分割をすべて書き上げその個数を数えて等しいかどうか確かめることができる．しかし，無限個の n の値についての主張である恒等式を，個々の場合の数え上げで証明することはできない．そうではなく，われわれはどんな正整数 n に対しても成り立つような何らかの一般的な論法を発見しなければならない．自然な考えとしては，分割を数える一般的な方法を編み出し，分割の個数の明示的な公式を求め，恒等式の両辺が一致することをみるという方法があるだろう．例えば，$p(n \mid \text{和因子は奇数})$ が n^2+2 (とか何かそのような式) で与えられることを示し，さらに $p(n \mid \text{和因子は相異なる})$

も同じ式で与えられることが示せればよい．だが，そのような公式を発見できるのだろうか．前章で見た分割の個数の表 (演習問題 1 も含めて) で最初のいくつかの値は計算できている．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n\,|$ 和因子は奇数)	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10

この表からは，この関数が何か簡単な関数，例えば多項式，で表されるような兆候は感じられない．となると，この攻略法では証明できないであろう．しかし，われわれが失敗したのは，必要以上の高望みをしたからである．いま，タイプ X の対象の個数とタイプ Y の対象の個数が等しいことを証明したいだけなら，なにもそれらが実際に何個あるかを知る必要はないのである．ただ，タイプ X の各対象に対しタイプ Y の対象を 1 つ取り出してペアにしてやることができ，また，その逆も可能であることさえ分かればよいのである．第 1 章の洞窟壁画では，$n = 2, 3, 4$ に対して，和因子がすべて奇数であるような分割と和因子がすべて相異なるような分割との間に，そのようなペア作りがなされていた．2 つの集合の間のこのような 1 対 1 のペア作りを**全単射**という．したがって，分割恒等式の証明には，問題となっている 2 種類の分割の間の全単射を見出せばよいのである．

$$x_1 \longmapsto y_1$$
$$x_2 \longmapsto y_2$$
$$x_3 \longmapsto y_3$$

図 2.1：2 つの 3 元集合の間の典型的な全単射

分割の間の全単射がどのようなものであるかは，決して明らかではない．整数 n の分割とは，足すと n になる和因子の集まりである．したがって，分割の間の全単射は，和因子に対する操作として記述されなければならない．簡単なものとしては，偶数の和因子を 2 つの和因子に等分する操作がある．この操作の逆として，2 つの等しい和因子があったら 2 倍の大きさの 1 つの和因子に融合させる操作がある．これを用いるとただちに，恒等式

$$p(n\,|\,\text{和因子は偶数}) = p(n\,|\,\text{どの値の和因子も偶数個}) \quad (n \geq 1) \tag{2.2}$$

の全単射法による証明が得られる．この全単射がどのように機能しているかを $n = 6$ について調べてみよ:

$$\begin{array}{lcl} 6 & \longmapsto & 3+3 \\ 4+2 & \longmapsto & 2+2+1+1 \\ 2+2+2 & \longmapsto & 1+1+1+1+1+1 \end{array} \tag{2.3}$$

演習問題

3. n が奇数のとき，和因子がすべて偶数であるような分割は存在しない，また，どの値の和因子も偶数個であるような分割も存在しない．なぜか．偶数 $n \geq 2$ に対し，全単射を見出すことにより次の 2 つの恒等式を示せ．

$$p(n\,|\,\text{和因子は偶数}) = p\left(\frac{n}{2}\right) = p(n\,|\,\text{どの値の和因子も偶数個}) \tag{2.4}$$

これにより，恒等式 (2.2) の全単射法による別証明が与えられる．
(難易度：2)

2.3　オイラーの恒等式に対応する全単射

オイラーの恒等式に戻ろう．この場合には，全単射としてどのようなものをとればよいだろうか．それは，和因子がすべて奇数の分割に対して，和因子が相異なる分割を与えるようなものでなくてはならない．また，その逆 (写像) は，反対の対応を与えなくてはならない．

奇数の和因子から相異なる和因子へ：和因子がすべて相異なるとすると，同じ値をもつ 2 つの和因子は存在しない．したがって，同じ値を持つ 2 つの和因子が存在するような分割に対しては，何らかの操作を施す必要がある．すでに

見たように，自然な操作は，その 2 つの和因子を 2 倍の大きさの 1 つの和因子に融合させることである．この操作を，すべての和因子が相異なるようになるまで繰返す．操作の各段階で和因子の個数は減っていくから，最悪の場合でも和因子の個数が 1 つだけになれば，繰返し操作は終了する．例えば，

$$\begin{aligned}3+3+3+1+1+1+1 &\longmapsto (3+3)+3+(1+1)+(1+1)\\ &\longmapsto 6+3+2+2\\ &\longmapsto 6+3+(2+2)\\ &\longmapsto 6+3+4.\end{aligned}$$

ステップを逆行し奇数の和因子へ：2 つの等しい和因子の融合操作の逆は，偶数の和因子を 2 つの和因子に等分することである．この操作を繰返せば，奇数の和因子だけからなる分割に到達できる．操作の各段階でどれか 1 つの和因子の大きさは小さくなるから，最悪の場合でもすべての和因子が 1 に等しくなれば，繰返し操作は終了する．例えば，

$$\begin{aligned}6+3+4 &\longmapsto (3+3)+3+(2+2)\\ &\longmapsto 3+3+3+2+2\\ &\longmapsto 3+3+3+(1+1)+(1+1)\\ &\longmapsto 3+3+3+1+1+1+1.\end{aligned}$$

どの和因子をどういう順番で等分 (または融合) するか，いろいろなやり方があることが気になるかもしれない．しかし，ある 1 つの和因子を等分することは，他の和因子の等分に影響することはないから，等分する順番は結果に影響することはない．等分と融合は互いに他の逆操作であるから，融合の順番もまた結果に影響することはない．

これで，奇数の和因子からなる分割に対して相異なる和因子からなる分割を与える操作が得られた．各ステップを逆行して，偶数の和因子を繰り返し等分していけば，相異なる和因子からなる分割に対し奇数の和因子からなる分割を与える操作が得られる．よって，これがオイラーの恒等式の証明を与える全単射である．$n=6$ に対しては，この操作は次のように働く：

$$\begin{array}{lcl} 5+1 & \longmapsto & 5+1 \\ 3+3 & \longmapsto & 6 \\ 3+1+1+1 & \longmapsto & 3+2+1 \\ 1+1+1+1+1+1 & \longmapsto & 4+2 \end{array} \tag{2.5}$$

恒等式の全単射による単純な証明こそ，なぜそれが成り立つのかについてのもっとも深い理解をもたらすものだということは，組合せ論の研究者が共通して抱いている感覚である．読者も次の演習問題で自らの理解度を試してみてほしい．

演習問題

4. 同じ全単射によって，$n \geq 1$ に対し，より強い次の主張を証明できる，なぜか．

$$p(n \mid \text{和因子は奇数で，その個数は偶数個}) \\ = p(n \mid \text{和因子は相異なり，奇数和因子の個数は偶数個}). \tag{2.6}$$

また，2 箇所にある「偶数」を「奇数」に代えた主張も成り立つ．
(難易度：2)

5. 上の全単射では，等しい 2 つの和因子を融合させた．「2 つの和因子」を「3 つの和因子」に代えてみよ．等しい 3 つの和因子を融合させる操作を可能な限り続けたとすると，結果としてどのような分割が得られるか．逆は，3 で割り切れる和因子を 3 等分する操作である．この操作の繰返しはいつ終了するか．この新しい全単射によって，どのような恒等式が証明されるか．(難易度：1)

6. 前問のアイディアを一般化することにより，任意の整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対し，次の恒等式を証明せよ：

$$p(n \mid \text{どの和因子も } k \text{ で割り切れない}) \\ = p(n \mid \text{等しい和因子は高々 } k-1 \text{ 個}). \tag{2.7}$$

(難易度：1)

2.4 オイラーペア

オイラーの恒等式の証明に用いた融合と等分のテクニックは，幅広く応用できる．分割の集合 A, B があったとして，等分操作によって A に属す分割が B に属す分割にうつり，融合操作によって B に属す分割が A に属す分割にうつるならば，適用できるのである．

例えば，A として整数 n の分割ですべての和因子が 1 であるものの集合を考えよう．そのような条件を満たす分割は n 個の 1 の和 $1+1+\cdots+1$ しかありえないから，$p(n\,|$ すべての和因子は $1) = 1$ である．融合操作によって 2 個の 1 が 2 に融合され，2 個の 2 が 4 に融合され，2 個の 4 が 8 に融合され，$\cdots$ と，すべての和因子が相異なるようになるまで続く．したがって，対応する集合 B に属す分割は，n の分割でそのすべての和因子が $\{1, 2, 4, 8, \cdots\}$ (2 のベキ) に属し，しかも，相異なっているようなものである．等分操作が B に属す分割を A に属す分割にうつすことを確かめよう．明らかに 2 のベキ 2^k は 2 個の 2 のベキ $2^{k-1}+2^{k-1}$ に等分される．2 のベキで奇数のものは $2^0 = 1$ しかないから，この操作はすべての和因子が 1 になるまで続く．

したがって，$n \geq 1$ に対して次の恒等式の証明を与える全単射が得られた：

$$\begin{aligned} &p(n\,|\,\text{すべての和因子は } 1) \\ &\qquad = p(n\,|\,\text{和因子はすべて相異なる 2 のベキ}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

この左辺は 1 に等しかったから，任意の正整数は相異なる 2 のベキの和にただ一通りに表されることが示された．これは，整数の 2 **進数表示**といわれる．例えば，

$$\begin{aligned} 1 &= & & & 2^0 &= (1)_2 \\ 2 &= & & 2^1 & &= (10)_2 \\ 3 &= & & 2^1 + & 2^0 &= (11)_2 \\ 4 &= 2^2 & & & &= (100)_2 \\ 5 &= 2^2 & & + & 2^0 &= (101)_2 \\ 6 &= 2^2 + & & 2^1 & &= (110)_2 \\ 7 &= 2^2 + & & 2^1 + & 2^0 &= (111)_2\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで，$(b_k b_{k-1} \cdots b_0)_2$ が数の 2 進数表示である．これは，コンピュータにおいて数を記憶させる標準的な方式である．

以上，われわれは融合・等分操作を 2 つの異なる場合に適用した．すなわち，まずは，オイラーの恒等式

$$
\begin{aligned}
&p(n \,|\, \text{和因子は } \{1,3,5,7,\cdots\} \text{ に含まれる}) \\
&\qquad = p(n \,|\, \text{和因子は相異なり } \{1,2,3,4,5,\cdots\} \text{ に含まれる}) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

を示すための全単射として，そして，次に 2 進数表示の一意性

$$
\begin{aligned}
&p(n \,|\, \text{和因子は } \{1\} \text{ に含まれる}) \\
&\qquad = p(n \,|\, \text{和因子は相異なり } \{1,2,4,8,\cdots\} \text{ に含まれる}) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

を示すための全単射として用いた．では，融合・等分操作の限界はどこにあるのだろうか．言い換えると，どのような数の集合 N, M に対して，和因子がすべて N に属すような分割と和因子がすべて相異なり M に属すような分割との間に全単射が存在するのだろうか．このような集合の組 (N, M) を**オイラーペア**ということにしよう．容易に分かるように，オイラーペアが与えられれば，正整数 c を 1 つ選んで c 倍してやることで新しいオイラーペアを作ることができる．例えば，恒等式 (2.11) を 3 倍してやることで新しいオイラーペア恒等式

$$
\begin{aligned}
&p(n \,|\, \text{和因子は } \{3\} \text{ に含まれる}) \\
&\qquad = p(n \,|\, \text{和因子は相異なり } \{3,6,12,24,\cdots\} \text{ に含まれる}) \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

が得られる．

ここで，融合・等分操作の作用の仕方をもう一度調べてみよう．まず，すべての和因子が集合 N に属すような分割から出発する．2 つの等しい和因子があれば融合させ，すべての和因子が相異なるようになるまで続ける．融合の各ステップは偶数の和因子を等分することで逆戻りできる，ただし，その際，等分操作をいつ止めればよいのかを知っていなければならない．もちろん，すべての和因子が N に含まれるようになったときに止めるようにしたい．しかし，例えば，N が 3 と 6 をともに含むとき，6 になったときに等分を止めればよいのか，3 になってから止めればよいのかは分からないであろう．

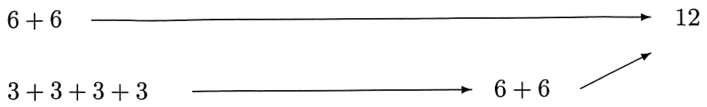


図 2.2：N が 3 と 6 をともに含むとき，大きさ 12 の和因子は $3+3+3+3$ の融合の結果としても出てくるし，$6+6$ の融合の結果としても出てくる．したがって，この融合操作は全単射にはならない．

この問題は，N に属するある元が他の元の 2 べキ倍になっているときにのみ生ずる．したがって，融合・等分操作によって，次の一般オイラーペア定理が得られる．

定理 2.1　N が正整数からなる集合で，N のどの元も他の元の 2 べキ倍とはなっていないとする．また，M を N の元とそのすべての 2 べキ倍からなる集合とする．このとき，次の恒等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &p(n \mid \text{和因子は } N \text{ に含まれる}) \\ &\quad = p(n \mid \text{和因子は相異なり } M \text{ に含まれる}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

この定理のアイディアの源は，I. シューアにある．しかし，完全に一般的な形で述べられたのは (Andrews, 1969b)[1]が最初である．シューアはこの話題に関する仕事を何も出版しなかったが，P. バッハマンの『初等整数論』に “J.” シューアによる結果として紹介された．イニシャル “J” は L. E. ディクソンの『数論の歴史』の第 II 巻 (Dickson, 1920) でも使われている．こうした混乱の結果，アンドリュースは多くの論文で I. J. シューアとして引用してしまったが，シューア自身はつねに “I. シューア”の名で論文を発表していたのである．

[1] 本書では，巻末付録 B の文献表にある参考文献は (著者名，出版年) の形式で引用される．

演習問題

7. $\lfloor x \rfloor$ で x 以下で最大の整数を表す．すべての和因子が相異なる 2 のベキ，または 2 のベキの 3 倍であるような n の分割の総数は $\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor + 1$ であることを，定理 2.1 を用いて証明せよ．(難易度：2)

われわれは，オイラーペア恒等式の証明への融合・等分操作の適用限界を見極めた．だが，この方法では見出せないようなオイラーペアも存在するのではないかという疑問もわくであろう．研究してみよう．定理 2.1 が使えない典型的な場合は $N = \{1, 3, 6\}$ である．(N, M) がオイラーペアとなるような集合 M を構成することを試みてみよう．

n	1	2	3	4	5	6
$p(n \mid$ 和因子は $\{1, 3, 6\}$ に含まれる$)$	1	1	2	2	2	4

この表を使って，$M = \varnothing$ (空集合) から始めて，順に $p(n \mid$ 和因子は N に含まれる$)$ $= p(n \mid$ 和因子は相異なり M に含まれる$)$ が成り立つように M を構成していこう．

(1) $n = 1$ の分割は 1 個である．$M = \varnothing$ では，和因子が M に属すような分割は存在し得ないから，M に 1 を追加する必要がある．

(2) $n = 2$ の分割も 1 個である．$M = \{1\}$ では，和因子が M に属し，しかも相異なるような 2 の分割は存在し得ないから，M に 2 を追加する必要がある．

(3) $n = 3$ の分割は 2 個ある．$M = \{1, 2\}$ では，和因子が M に属し，しかも相異なるような 3 の分割は $2 + 1$ だけだから，M に 3 を追加する必要がある．

(4) $n = 4$ の分割も 2 個ある．$M = \{1, 2, 3\}$ では，和因子が M に属し，しかも相異なるような 4 の分割は $3 + 1$ だけだから，M に 4 を追加する必要がある．

(5) $n=5$ の分割も 2 個ある．$M=\{1,2,3,4\}$ とすると，和因子が M に属し，しかも相異なるような 5 の分割は $4+1, 3+2$ とすでに 2 つあるから，5 を追加してはいけない．

(6) $n=6$ の分割は 4 個ある．$M=\{1,2,3,4\}$ とすると，和因子が M に属し，しかも相異なるような 6 の分割は $4+2, 3+2+1$ の 2 つだけだから，6 を追加する必要がある．しかし，$M=\{1,2,3,4,6\}$ としても，新たに得られる分割は 6 のみであり，4 個の分割は得られない．

ステップ 6 でうまくいかなくなった．しかし，それ以前のステップでは，M の作り方はただ 1 通りであり，他のよりよい選択肢はありえない．したがって，$N=\{1,3,6\}$ に対しては，オイラーペアは存在しない．実際，定理 2.1 で与えられたもの以外にオイラーペアは存在しないのである．読者は，次の一連の演習問題を解くことによって，その証明を知ることができる．

演習問題

8. 与えられた集合 N に対して (N,M) がオイラーペアとなるような集合 M は高々 1 つしか存在しない．なぜか．逆向きに考えてみよう．もしそのような集合が 2 つあったとし，M, M' としよう．このとき，一方に含まれ他方に含まれていないような整数のうち最小のものがあるはずだから，それを n とおく．このとき，$p(n \mid$ 和因子はすべて相異なり M に含まれる$)$ と $p(n \mid$ 和因子はすべて相異なり M' に含まれる$)$ を比較すると，どうなるだろうか．(難易度：2)

9. 与えられた集合 N において，ある元は他の元の 2 ベキ倍になっていたとする．すなわち，ある a と $2^k a$ がともに N に含まれていたとする．このとき，(N,M) がオイラーペアとなるような M は存在しない．なぜか．$2^k a$ が上の性質を持つ最小の正整数だとする．このとき，上の例と同様にして，すべての $n < 2^k a$ に対して順に M を拡大していくと，$n = 2^k a$ のところでうまくいかなくなることを示せ．(難易度：2)

10. オイラーペアとは，$2M \subset M$ かつ $N = M - 2M$ を満たす集合のペア (N,M) として，もっと簡潔に特徴付けられることを示せ．(難易度：3)

11. (Andrews, 1969a) $k > 1$ とし，k のベキへの n の分割で，同じ大きさの和因子は高々 $k-1$ 個しか現れないようなものの個数は，つねに 1 であることを示せ．(難易度：3)

第 3 章

フェラーズグラフ

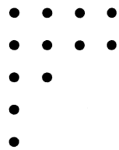
分割の図形的表現は，第 1 章に登場した想像上の先史時代人にとってだけでなく，われわれにとっても大いに役に立つものである．分割に関するすばらしい結果の多くは，図形的に説明されるともっとも分かりやすい．

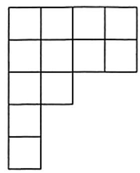
この章のポイント

- フェラーズグラフとフェラーズ盤は整数の分割を図形的に表現する 2 つのよく似た方法である．分割の和因子は，それぞれ，ドット，ないしは，四角で表される．
- 分割の共役分割が，フェラーズグラフの行と列を転置することにより得られる．
- 分割関数 $p(n)$ はどの程度の速さで増大するか．有名なフィボナッチ数で上から抑えられることが示される．
- 分割恒等式のフェラーズグラフを用いた見事な証明の例は，恒等式
$$p(n \mid \text{和因子は超相異なる}) = p(n \mid \text{和因子は相異なり，偶数和因子} > 2 \times \text{奇数和因子の個数})$$
に対するブレスードの全単射である．
- この伝統に属す証明の見本は，フランクリンによるオイラーの 5 角数定理
$$p(n \mid \text{偶数個の相異なる和因子をもつ}) = p(n \mid \text{奇数個の相異なる和因子をもつ}) + e(n)$$
の証明である．$e(n)$ は，n が 5 角数，すなわち，ある整数 j があって $\dfrac{j(3j \pm 1)}{2}$ と表されるとき $(-1)^j$，そうでないとき，0 を表す．

3.1　フェラーズグラフとフェラーズ盤

分割を図示するよく知られた方法が 2 つある．$4+4+2+1+1$ を考えよう．



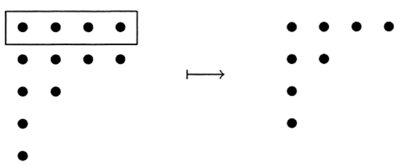


ドットを用いた表示が見やすい場合もあれば，正方形を用いた表示が自然に見える場合もある．前者を $4+4+2+1+1$ の**フェラーズグラフ**といい，後者を $4+4+2+1+1$ の**フェラーズ盤** (または**ヤング図形**[1]) という．

演習問題

12. この例を手がかりにして，フェラーズグラフの正式な定義を与えることができるだろう．等間隔に並んだドットの行の集まりがフェラーズグラフとなるための条件は何か．

この章ではもっぱらフェラーズグラフのさまざまな変形法を取り扱う．そのような変形法が可逆ならば，それは全単射を与え分割恒等式の証明に利用できる．変形のもっとも簡単な例は，フェラーズグラフがあったらその先頭の行を取り除くことである．



---

[1] 以下，原書にしたがいフェラーズ盤とよぶが，日本では，ヤング図形とよばれることの方が多いようだ．

フェラーズグラフから先頭の行を取り除くと，新しいフェラーズグラフが残る．取り除かれた行の長さが r だとすると，新しいフェラーズグラフの行の長さはどれも r 以下である．逆に，そのようなフェラーズグラフに長さ r の行を先頭に付け加えれば，新しいフェラーズグラフが得られる．これで，分割恒等式

$$p(n \,|\, \text{最大和因子は } r) = p(n-r \,|\, \text{すべての和因子は } r \text{ 以下})$$

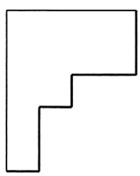
の証明を与える全単射が得られた．

この技巧の変形として，先頭の行の代わりに第 1 列を取り除くことも意味がある．このとき，新しいフェラーズグラフには取り除かれた列より長い列は存在しない．第 1 列の長さは行の数，すなわち，分割に表れる和因子の数に等しい．したがって，この列除去変形により，恒等式

$$p(n \,|\, m \text{ 個の和因子をもつ}) = p(n-m \,|\, \text{高々 } m \text{ 個の和因子をもつ})$$

の証明が得られた．

フェラーズ盤の形をあらためて見てみよう．盤の周囲は，てっぺんの水平な辺，左側の垂直な辺，そして左下の角（かど）から右上の角にいたる階段状の縁からなっている．明らかに，分割の情報は階段状の縁に含まれている．



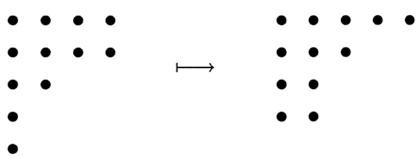
縁には，2 種類の角がある．外向きの角 ┘ と内向きの角 ┌ である．縁の 2 つの端点は内向きの角と考えることにする．外向きの角をなす正方形を取り除いても，残った図形は新しいフェラーズ盤になっている．一方，内向きの角に正方形を付け加えても，新しいフェラーズ盤が得られる．第 11 章で，このやり方でフェラーズ盤を成長させることを研究する．

演習問題

13. 外向きの角の位置を指定すれば，分割は一通りに定まるだろうか．(難易度：1)
14. 内向きの角の位置を指定すれば，分割は一通りに定まるだろうか．(難易度：1)
15. すべての内向きの角に正方形を付け加えて分割 (フェラーズ盤) を拡大するとき，内向きの角の個数は増加することを示せ．(難易度：2)

3.2　共役分割

オーバーヘッドプロジェクタ用の透明フィルムにフェラーズグラフを書き，プロジェクターにのせるときに裏返してしまったとしよう (数学の講演でよく見られる光景だ)．このとき，フェラーズグラフは別のフェラーズグラフに見える．



裏返しをしてしまった講演者は，**共役**とよばれる変換を実行したことになる．何が起きたのだろうか．はじめのグラフの行は新しいグラフの列になり，列は行になったのである．したがって，この変換は，その最大の和因子がはじめのグラフの和因子の個数と等しいようなグラフを出力する．これにより，また 1 つ新しい分割恒等式

$$p(n\,|\,m\text{ 個の和因子をもつ}) = p(n\,|\,\text{最大和因子は }m) \tag{3.1}$$

の全単射法による証明が得られた．

演習問題

16. 分割 a) $3+3+2+2+1+1$, b) $7+1$, c) $5+4+2+2+1$ の共役分割は何か．(難易度：1)

17. $n=7, m=3$ として，恒等式 (3.1) を，分割をすべてリストアップし，それらが共役によってどう対応するかを具体的に書き上げることによって証明せよ．(難易度：1)

18. 共役を用いて，恒等式

$$p(n\,|\,\text{高々 } m \text{ 個の和因子をもつ}) \\ = p(n\,|\,\text{すべての和因子は } m \text{ 以下}) \tag{3.2}$$

の全単射法による証明を与えよ．(難易度：1)

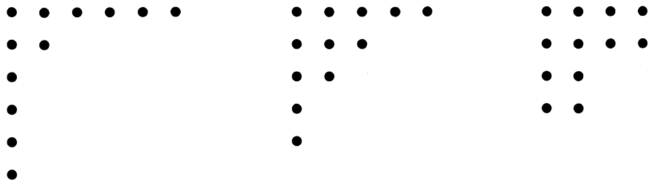
19. 演習問題 17 で書き上げた対応のリストを拡充して，$n=7, m=3$ の場合に恒等式 (3.2) に対する全単射を具体的に与えよ．(難易度：1)

20. 分割恒等式は，和因子の大きさや和因子の個数に関する条件を含んでいるのが普通である．これらの概念が共役によってどのように関係しあっているのかは上で見た．別のよくある条件は，各和因子が異なっているという条件である．共役を用いて，恒等式

$$p(n\,|\,1 \text{ から最大和因子まですべての大きさの和因子がある}) \\ = p(n\,|\,\text{和因子はすべて相異なる}) \tag{3.3}$$

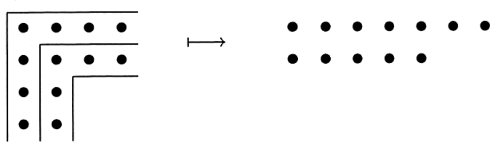
を示せ．例えば，$n=6$ に対して，左辺は $1+1+1+1+1+1, 2+1+1+1+1, 2+2+1+1, 3+2+1$ の 4 個の分割を与え，右辺は $6, 5+1, 4+2, 3+2+1$ の 4 個の分割を与えている．(難易度：2)

分割は，共役が自分自身と一致するとき，**自己共役**といわれる．(自己共役な分割とは共役変換の固定点のことであるといえば，もっと数学者っぽく聞こえる.) 例えば，12 の自己共役分割は，$6+2+1+1+1+1$, $5+3+2+1+1$, $4+4+2+2$ である．



自己共役分割を和因子が相異なる奇数であるような分割にうつす自然な変換がある．分かるだろうか．

まず，第 1 行と第 1 列をとり出し，それらを合わせてまっすぐに伸ばし新しい第 1 行とする．次に，第 2 行と第 2 列のうち残っている分を合わせて，新しい第 2 行とする．以下，同様に続ける．自己共役分割 (のフェラーズグラフ) は左上から右下に向かう対角線に関して対称だから，同じ長さの行と列を合わせて新しい行を作ることになるが，もとの行と列は 1 つのドットを共有しているから，できた行の長さはもとの行の長さの 2 倍から 1 を引いたものであり，したがって，奇数である．次の図を見れば，新しい分割の和因子がなぜすべて相異なるかは明らかであろう．



逆に，和因子が相異なる奇数であるような分割から出発し，各和因子を中心で折り曲げて対称なカギ形を作って合わせれば，自己共役なフェラーズグラフができあがる．この全単射により，恒等式

$$p(n \mid \text{自己共役}) = p(n \mid \text{和因子は相異なる奇数}) \tag{3.4}$$

が証明された．

演習問題

21. フェラーズグラフが長方形で横の長さが縦の長さ以上のとき，分割は**横長長方形**だということにしよう．行と列とを合わせて 1 つの行を作る上の考え方を応用して，次の恒等式の全単射法による証明を与えよ．

$$p(n \mid \text{隣り合う和因子の差は } 2) = p(n \mid \text{横長長方形})$$

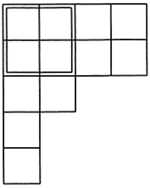
(難易度：1)

22. $p(n \mid \text{横長長方形})$ は $\sqrt{n}$ 以下の n の約数の個数と等しいことを示せ．(難易度：1)

23. n の約数の個数が奇数となるための必要十分条件は，n が平方数であることを示せ．(難易度：2)

24. 正整数 n について，$p(n)$ が奇数であることと $p(n \mid \text{和因子は相異なる奇数})$ が奇数であることとは同値であることを示せ．恒等式 (3.4) を利用せよ．(難易度：2)

25. フェラーズ盤の**ダーフィー正方形**とは，盤の左上に位置し内部に含まれる最大の正方形のことである．例えば，$4+4+2+1+1$ のダーフィー正方形の辺の長さは 2 である．



ダーフィー正方形の右側と下側には，小さなフェラーズ盤があることに注意しよう．さて，次の恒等式を証明せよ．

$$p(n \mid \text{ダーフィー正方形の辺} = j) = \sum_m p(m \mid \text{和因子 } \leq j)\, p(n - j^2 - m \mid \text{和因子の個数 } \leq j)$$

ダーフィー正方形については，第 8 章でまた立ち戻る．(難易度：2)

3.3　$p(n)$ の上界

n が増大するとき，$p(n)$ はどのような速さで増大するだろうか．n の多項式のようにだろうか，指数関数のようにだろうか，それとも他の何らかの関数のようになのだろうか．それどころか，直観的には $p(n)$ は n の単調増加関数と思われるが，それはどうしたら確かめられるだろうか．

この問題に対する完全な解答はたいへん複雑である．読者が分割関数 $p(n)$ 以上に複雑な関数にこれまでに出会ったことがあるかどうか，おそらくはないであろう．このまれに見る怪物には，第 6 章でちらりとお目にかかることになる．

この節では，フェラーズグラフをいたずらしてみると興味深い部分的解答が得られることを見てみよう．まず，$p(n)$ が実際に n が大きくなるとともに増加していくことを示そう．言い換えれば，証明したいことは

$$\text{すべての } n \geq 2 \text{ に対し}\quad p(n) > p(n-1)$$

となることである．例として 3 の分割



と 4 の分割



とを比較してみよう．$n-1$ のどの分割に対しても，ドットを 1 つ一番下の行として付け加えれば n の分割ができる．逆に，一番下の行が 1 個のドットからなるような分割に対して，そのドットを取り除けば $n-1$ の分割に戻る．したがって，$p(n-1) = p(n\,|1 \text{ を和因子にもつ})$ であり，これより

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n\,|1 \text{ を和因子にもたない}) \\ &> p(n-1) \quad (n \geq 2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る．

演習問題

26. 5 の分割のフェラーズグラフを書き上げて，4 のフェラーズグラフと対応しないものにマークせよ．(難易度：1)

これで $p(n)$ が単調増加関数であることが分かった．次の仕事は，増加する速さの上界を決定することである．ここで与える上界はフィボナッチ数である．この数はイタリアの数学者ピサのレオナルド (フィボナッチ –ボナッチオの息子の意– とあだなされた) が著書『アバカスの書』(1202) で研究したものである．フィボナッチ本人もフィボナッチの数もどちらも深く研究する価値のある刺激的な存在である．

フィボナッチ数 $F_0, F_1, F_2, \cdots$ は，

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 2) \tag{3.6}$$

によって再帰的に定義される．定義が再帰的だというのは，定義の中に定義される対象そのものが用いられていることを意味している．この場合には，n 番目のフィボナッチ数が，それに先立つ 2 つのフィボナッチ数の和として定義されている．明らかに，この再帰の過程を進行させるためには 2 つの初期値が必要である．そのために，最初の 2 つのフィボナッチ数 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ が定義の一部となっているのである．

演習問題

27. 最初の 10 個のフィボナッチ数を計算せよ．(難易度：1)

28. 定義において n を $n-1$ で置き換えると，$n \geq 3$ に対して $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$ が得られる．これを用いて，

    a) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = 2F_{n-1} - F_{n-3}\ (n \geq 3)$.

    b) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = 2F_{n-2} + F_{n-3}\ (n \geq 3)$.

    がフィボナッチ数の別の定義を与えていることを示せ．(難易度：2)

29. n が偶数のとき，$F_n = F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \cdots$ であることを示せ．(難易度：2)

30. 整数の**結合** (または**順序つき分割**) とは，分割で和因子の順序を考慮に入れたもののことである．例えば，4 の 1 と 2 からなる結合は $2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1$ の 5 個存在する．5 番目のフィボナッチ数が 5 であることに注意しよう．すべての $n \geq 1$ に対して，1 と 2 からなる n の結合の総数は F_{n+1} に等しいことを示せ．(難易度：2)

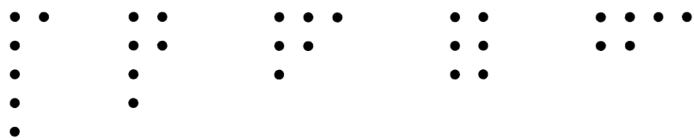
さて，恒等式 (3.5)，すなわち $p(n) = p(n-1) + p(n \,|\, 1$ を和因子に持たない)，に戻ろう．これをフィボナッチ数の再帰的定義式と比較するために，何とかして $p(n \,|\, 1$ を和因子に持たない) と $p(n-2)$ とを比べたい．

まず，$p(n-2) = p(n \,|$ 少なくとも 1 つの和因子は 2 に等しい) である．2 を挿入 (除外) する操作で，問題となっている種類の分割の間の全単射が得られるからである．次に，和因子が 1 を含まないような分割は，その最小の和因子 (2 以上である) を 2 を 1 個と残りをすべて 1 に分割することで，少なくとも 1 つの和因子は 2 に等しいような分割へと変換することができる．

例えば，$n = 6$ とすると，はじめの全単射は $n - 2 = 4$ の分割



を (それぞれに 2 を挿入することにより)，



にうつす．1 に等しいすべての和因子と 2 を融合させると，2 番目のグラフ以外では，新しくできる和因子は最小和因子になっている．



以上の議論によって，

$$\begin{aligned} p(n-2) &= p(n\,|\,1\ \text{を和因子に持たない}) \\ &\quad + p(n-2\,|\,1\ \text{でない最小和因子} < 2 + \text{和因子}\ 1\ \text{の個数}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

が示された．右辺の第 2 項は正または 0 である．したがって，(3.5) と合わせると，フィボナッチ風の不等式

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) \quad (n \geq 2) \tag{3.8}$$

が得られた．これで，$p(n)$ の上界を与える定理を数学的帰納法で証明することができる．

定理 3.1　任意の整数 $n \geq 0$ に対し，分割関数 $p(n)$ は $n+1$ 番目のフィボナッチ数 F_{n+1} 以下である．

証明　$p(0) = F_1 = p(1) = F_2 = 1$ だから，定理は $n = 0, 1$ に対して成り立っている．$k \geq 2$ として，定理がすべての $n < k$ に対して成り立っていると仮定しよう．このとき，

$$\begin{aligned} p(k) &\leq p(k-1) + p(k-2) && \text{((3.8) より)} \\ &\leq F_k + F_{k-1} && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= F_{k+1} && (F_k\ \text{の定義}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

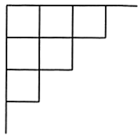
となる．よって，定理はすべての $n \geq 0$ に対して成り立つことが分かった．□

演習問題

31. $n = 1, 2, \cdots, 10$ に対して $p(n)$ と F_{n+1} の値を比較せよ．両者が異なる最初の n はいくつか．なぜそうなるか，上の議論に照らし合わせて考えよ．(難易度：1)

32. 上の定理によれば，$p(n)$ の増大の速さはフィボナッチ数の増大の速さ以下である．では，フィボナッチ数はどの程度の速さで増大するだろうか．τ で**黄金比** $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ を表すとき，$\tau^{n-1} \leq F_{n+1} \leq \tau^n$ $(n \geq 0)$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ．(難易度：2)

33. フィボナッチ数に次いでよく知られた組合せ論的整数列は，**カタラン数** $C_m = \binom{2m}{m}/(m+1)$ である．分割 $1+2+3+\cdots+(m-1)$ のフェラーズ盤のことを，**高さ m の階段**とよぼう (一番下に空の段があると考える)．例えば，高さ 4 の階段とは次のようなものである．

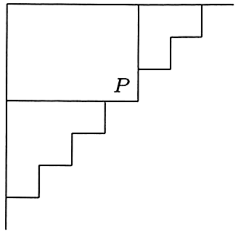


高さ m の階段の内側に含まれるフェラーズ盤の個数 (空の盤も数える) は $m = 1, 2, 3, 4$ に対して C_m と一致していることを示せ．(難易度：1)

34. カタラン数は，$C_0 = 1$ として再帰的関係式

$$C_{m+1} = C_0 C_m + C_1 C_{m-1} + C_2 C_{m-2} + \cdots + C_m C_0 \quad (m \geq 0)$$

を満たす．高さ m の階段に含まれるフェラーズ盤の個数も，同じ再帰的関係式を満たすことを示せ．内側に含まれるフェラーズ盤が階段のステップとぶつかる点 (存在しないときもある) のうちでもっとも高さの低い点 P の位置に注目して考えよ．(難易度：3)



3.4 ブレスードの美しい全単射

ある集合に属す数が互いに相異なるということを，どの 2 つの数の差も 1 以上であると言い換えることができる．どの 2 数の差も 2 以上のとき，**超相異**なるということにしよう．[2]

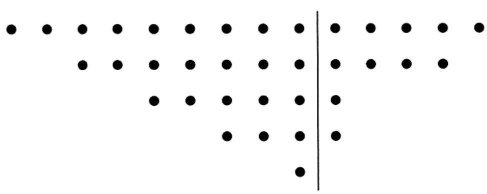
和因子が超相異なる分割は和因子が相異なる分割だから，後者のタイプの分割の方が多く存在する．例えば，11 の超相異なる和因子への分割は 11, $10+1, 9+2, 8+3, 7+4, 7+3+1, 6+4+1$ の 7 通り存在する．相異なる和因子への分割だが，超相異なる和因子への分割ではないものは，$8+2+1, 6+5, 6+3+2, 5+4+2, 5+3+2+1$ がある．さて，次のちょっと奇妙に見える定理を証明しよう．

定理 3.2 $p(n\,|$ 和因子は超相異なる$)$

$= p(n\,|$ 和因子は相異なり，かつ，

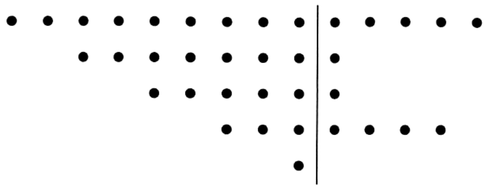
偶数和因子 $>2\times$奇数和因子の個数$)$

$n=11$ とすると，定理の右辺は 11, $10+1, 8+3, 7+4, 7+3+1, 6+4+1, 6+5$ の 7 個の分割を数え上げている．デヴィッド・ブレスード (1980) による全単射法による証明は次のようなものである．和因子が超相異なるような分割のフェラーズグラフを考え，左端が下に行くにつれ 2 ずつ右にずれていくように整列し直す．垂直線をその左側には最後の行のドットがただ 1 個となるように引く．垂直線の左側にあるドットは，下から順に $1, 3, 5, \cdots$ 個となっている．$14+11+6+4+1$ に対しては，グラフは



[2]互いに相異なることを英語では “distinct” という．超相異なるとは，“super-distinct” の訳である．

となる．垂直線の右側は新しいフェラーズグラフになっている．この行を入れ換えて，ドットが奇数個の行をドットの多いものから少ないものへと並べ，次にドットが偶数個の行を同様に並べ直す．



ここで垂直線を取除いてグラフの各行を新しい和因子と思ってやると，分割 $14+8+6+7+1$ を得る．この分割で偶数の和因子はどれも 4 (= 奇数の和因子の個数の 2 倍) より大きい．

演習問題

35. ブレスードの手続きは，つねに，和因子が互いに相異なり偶数和因子は奇数和因子の個数の 2 倍より大きいような分割を与える．それはなぜか，説明せよ．(難易度：2)
36. この手続きは可逆である，すなわち，和因子が互いに相異なり偶数和因子は奇数和因子の個数の 2 倍より大きいような分割はすべてちょうど 1 回ずつ現れる．それはなぜか，説明せよ．(難易度：2)
37. 垂直線の右側のグラフを並べなおすときに，ドットが偶数個の行を先に，奇数個の行を後にするようにしたら (どちらもドットの多いものから少ないものへと並べる) どうなるかを調べよ．(難易度：3)
38. ミニ研究プロジェクト：和因子が超々相異なる[3] (どの 2 つの和因子の差も 3 以上) 分割に対して類似の結果を定式化し，証明せよ．
(難易度：3)

[3]超々相異なる = “super-duper distinct”

3.5 オイラーの 5 角数定理

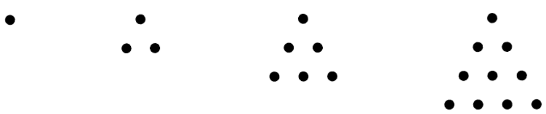
オイラーは歴史上もっとも多産な数学者の一人である．彼の全集の全体は何千ページにも及ぶ．したがって，彼の名を冠した分割恒等式が複数存在しても驚くにはあたらない．相異なる和因子への分割と奇数和因子への分割との間のオイラーの恒等式に加えて，ここでは，相異なる奇数個の和因子への分割と相異なる偶数個の和因子への分割の間のオイラーの恒等式を与えよう．オイラーの結果を分割についての結果として言い換えたのは，じつはルジャンドルである．これまでに調べてきた恒等式とは違って，これは完全に正確な等式ではなく，ある種の数に対しては補正項が必要になる．

定理 3.3 (オイラーの 5 角数定理)

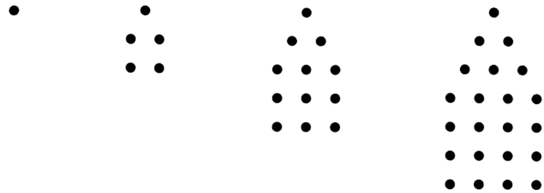
$$p(n \mid \text{和因子は偶数個で相異なる}) \\ = p(n \mid \text{和因子は奇数個で相異なる}) + e(n).$$

ここで $e(n)$ は，$n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2}$ (j は整数) と表されるとき $e(n) = (-1)^j$，そうでないとき $e(n) = 0$ で与えられる．

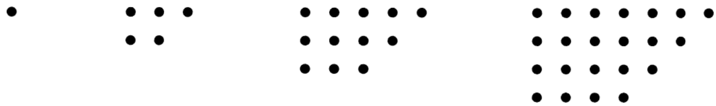
この定理の名前は，議論のよい出発点である．**3 角数**とは，$1, 3, 6, 10, \cdots$，すなわち，一辺が $1, 2, 3, 4, \cdots$ の 3 角形となるように並べたドットの個数のことである．



j 番目の 3 角数は $1 + 2 + 3 + \cdots + j = \dfrac{j(j+1)}{2}$ である．同様に **5 角数**とは，$1, 5, 12, 22, \cdots$，すなわち，一辺が $1, 2, 3, 4, \cdots$ の 5 角形となるように並べたドットの個数のことである．

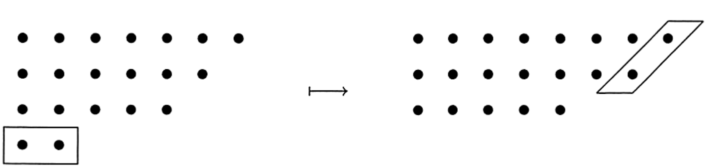


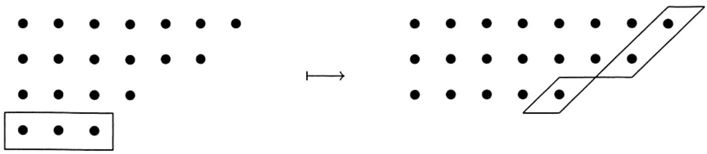
見れば明らかなように，j 番目の 5 角形は，横 j，縦 $j-1$ の長方形の上に一辺 j の三角形が乗っている．したがって，j 番目の 5 角数は $\dfrac{j(j+1)}{2}+j(j-1)$ に，整理して $\dfrac{j(3j-1)}{2}$ に等しい．この 5 角形を横倒しにして，三角形をなすドットを一直線になるように整頓するとフェラーズグラフが得られる．

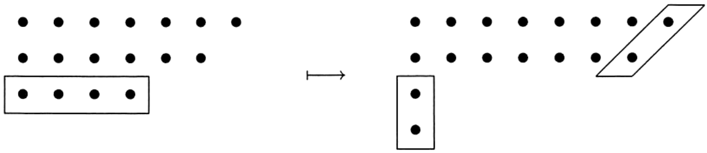


これらは，$1, 3+2, 5+4+3, 7+6+5+4, \cdots$ のように，和因子が互いに相異なる分割のフェラーズグラフになっている．これらの特別な分割は，以下に与えるオイラーの 5 角数定理の証明で例外的な場合として登場する．この全単射法による証明は 1881 年にフランクリンによって発見され，かなりな評判を博したものである．

整数 n の相異なる偶数個の和因子への分割と相異なる奇数個の和因子への分割との間に全単射を作り出すことを試みよう．この目的にもっともかなっているのは，和因子が互いに相異なるという性質を保存しながら，和因子の個数を 1 だけ変える可逆な変換である．まず思いつくアイディアとして，最小の和因子を取り，そのドットを 1 個ずつ残りの和因子にふり分けたらどうなるであろうか．3 つばかり例を見てみよう．

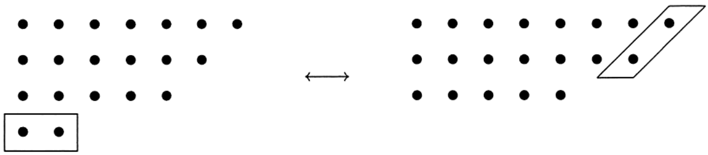






最初の 2 つの例が示すように，この変換は，取り除かれる行に含まれるドット数が全体の行数より小さければ，相異なる和因子への分割を与える．しかし，最初の 2 つの例が同じ分割を与えてしまうので，可逆な変換を作り出すにはもっと強力な何かが必要である．逆変換がどの程度うまくいくものかも見ておこう．

逆向きの写像は，大きい方の和因子からドットを取って，新たに最小和因子を作り出すことになる．移動すべきドットの個数を決める方法が必要だが，最大和因子から始めて長さが 1 ずつ違う行の行数としてみよう．言い換えれば，フェラーズグラフの一番右端の対角線を取り除くのである．



この 2 つの変換を組み合わせて使ってみたらどうであろう．もちろん，最短の行を取り除くか，右端の対角線を取り除くかを決める基準が必要である．ただ 1 つのまっとうな規則は，右端の対角線が最短行より短いときには対角線の方を動かし，そうでないときには最短行の方を動かすというものである．

しかし，上の変換では正しいフェラーズグラフが得られない場合がある．すなわち，最短行と右端の対角線が右下の角で交差し，かつ，最短行の長さが対角線の長さと等しいか 1 だけ長い場合である．



この左のフェラーズグラフは，この節の前半で考えた $\dfrac{j(3j-1)}{2}$ 個のドットを含む 5 角形である．その長方形部分にさらに 1 列付け加わったものが右のフェラーズグラフで，$\dfrac{j(3j+1)}{2}$ 個のドットを含んでいる．これらの 5 **角形分割**を除けば，奇数個の相異なる和因子への分割を偶数個の相異なる和因子への分割にうつす変換が作られた．したがって，

$$
\begin{aligned}
&p(n \mid \text{和因子は偶数個で相異なる}) \\
&\quad = p(n \mid \text{和因子は奇数個で相異なる}) + e(n)
\end{aligned}
$$

である．ここで $e(n)$ は，n が $\dfrac{j(3j \pm 1)}{2}$ (j は整数) に等しくないとき $e(n) = 0$ で，等しいとき j ($=$ 和因子の個数) が偶数なら 1，奇数なら -1 である．これでオイラーの 5 角数定理が証明された．

演習問題

39. P が n の分割のとき，サイズ関数 $|\cdot|$ を $|P| = n$ と定義する．分割のペア $(P, P_{偶})$ と $(P', P_{奇})$ との間の全単射を見出せ．ここで，P, P' は任意の分割，$P_{偶}$ は偶数個の相異なる和因子への分割，$P_{奇}$ は奇数個の相異なる和因子への分割を動き，ペアに含まれるドットの個数の和は一定，すなわち，$|P| + \left|P_{偶}\right| = |P'| + \left|P_{奇}\right|$ という条件に従うものとする．(難易度：3)

40. 前問から，$n \geq 1$ に対して，和

$$\sum_{k \geq 0} p(n-k)p(k \mid \text{和因子は偶数個で相異なる})$$

は和

$$\sum_{k \geq 0} p(n-k)p(k \mid \text{和因子は奇数個で相異なる})$$

に等しいことを導け．オイラーの 5 角数定理を用いて

$$\sum_{j\geq 0} p\left(n - \frac{j(3j\pm 1)}{2}\right)(-1)^j = 0$$

を示せ．この等式は分割関数に対する次の再帰的関係式に読み替えられることを説明せよ．

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \cdots$$

第 5 章では，この再帰的関係式の別証明を与え，より詳しい議論を行う．(難易度：2)

41. フランクリンの全単射はまたファインによる次の定理の証明も与えている．

$$\begin{aligned} &p(n \mid \text{和因子は相異なり，最大和因子は奇}) \\ &\qquad - p(n \mid \text{和因子は相異なり，最大和因子は偶}) \\ &= \begin{cases} (-1)^j & \left(n = \dfrac{j(3j\pm 1)}{2} \text{のとき}\right), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

なぜだろうか．(難易度：2)

42. フランクリンのアイディアを，傾きが $\frac{1}{2}$ の右端対角線を考えることで，和因子が超相異なる分割に適用してみたくなる．注意深くしないと，$n = 2j^2 - j, 2j^2, 2j^2 + j$ の場合を除いて，偶数個の超相異なる和因子への分割と奇数個の超相異なる和因子への分割とは同じ数だけ存在するという，誤った結論に導かれやすい．どのようにしてこの誤った結論に導かれてしまうのか，また，その際どのような見落としがあったのかを説明せよ．(難易度：3)

43. 分割恒等式

$$\begin{aligned} &p(n \mid \text{和因子の個数は偶数}) - p(n \mid \text{和因子の個数は奇数}) \\ &\qquad = (-1)^n p(n \mid \text{和因子は相異なる奇数}) \end{aligned}$$

を，(以下に説明する) シルベスターの全単射によって証明せよ．偶数和因

子を含むか，または，2 個の等しい奇数和因子を含むような分割の全体を考え，次の変換で対応するペアに分ける．最大の偶数和因子をとり，その $\frac{1}{2}$ 以上の和因子で重複しているものがなければ，それを 2 つの和因子に等分する．この操作ができないときには，最大の重複する和因子 2 個を 1 個の和因子に融合する．最後に，n の相異なる奇数和因子への分割について，和因子の個数の偶奇を決定すると，議論は完了する．(難易度：3)

44. 前問と同じ全単射を利用して，恒等式

$$p(n\,|\,\text{偶数和因子の個数は偶数}) - p(n\,|\,\text{偶数和因子の個数は奇数})$$
$$= p(n\,|\,\text{和因子は相異なる奇数})$$

を証明せよ．前問に現れていた $(-1)^n$ という因子はここには登場しない．なぜか．(難易度：2)

第 4 章

ロジャース–ラマヌジャン恒等式

この章では，これまでに見出された分割恒等式のうちでもっとも有名であり，もっとも目覚しいものを紹介する．ロジャース–ラマヌジャン恒等式，そして，見るからにそれと関係しているシューアの恒等式である．

この章のポイント

- オイラーの恒等式のような多くの分割恒等式は，ある種の分割の個数が和因子がある特定の集合に属すような分割の個数に等しいという形をしている．
- 2 つのロジャース–ラマヌジャン恒等式もこのタイプのものであり，和因子の属す集合はそれぞれ法 5 で ± 1 と合同になる整数の集合，または ± 2 と合同になる整数の集合である．どうしたら，このような恒等式が「発見」できるのかが示される．
- オイラーとロジャース–ラマヌジャン恒等式の形から，アルダーの予想に導かれる．この予想は，整数の分割の理論における未解決問題の 1 つである．
- 関連する結果に，シューアの恒等式がある．この場合には，和因子の属す集合は法 6 で ± 1 と合同な整数の集合である．ブレスードの巧妙な全単射法による証明を紹介する．

4.1　分割恒等式の基本タイプ

多くの分割恒等式は，整数からなるある集合 N があり，

$$p(n\,|\,\text{ある条件}) = p(n\,|\,\text{和因子は } N \text{ に属す}) \quad (n \geq 0) \tag{4.1}$$

という形を基本タイプとしている．われわれは，この種の恒等式をすでにいくつか見てきており，さまざまな証明法を学んだ．例をあげると，第 2 章では，融合・等分法により

$$p(n\,|\,\text{同じ値を持つ和因子の個数は偶数}) = p(n\,|\,\text{和因子はすべて偶数})$$

を示した．これは，N を偶数の集合として (4.1) のタイプである．第 2 章の締めくくりは，オイラーペア (N, M) に対して成り立つ，より進んだ恒等式

$$p(n\,|\,\text{和因子は相異なり，かつ，} M \text{ に属す}) = p(n\,|\,\text{和因子は } N \text{ に属す})$$

であった．これも明らかに (4.1) のタイプである．第 3 章では，共役変換を用いて

$$p(n\,|\,\text{和因子は } k \text{ 個以下}) = p(n\,|\,\text{和因子は } k \text{ 以下})$$

が示された．この恒等式も $N = \{1, 2, 3, \cdots, k\}$ として (4.1) のタイプである．

演習問題

45. (4.1) のタイプではない分割恒等式にはどのようなものがあったか．(難易度：1)

46. 次の (4.1) のタイプの恒等式を示せ．

$$p(n\,|\lambda_2 + \lambda_1,\ \text{ここで } \lambda_2 \geq 2\lambda_1 \geq 0)$$
$$= p(n\,|\,\text{和因子は } \{1, 3\} \text{ に属す})$$

ヒント：λ_1 個の 3 といくつかの 1 からなる分割を引き起こすような全単射を構成せよ．(難易度：2)

47. 前問のちょっとした変形として，

$$p(n \,|\, \lambda_2 + \lambda_1,\ \text{ここで}\ \lambda_2 \geq 2\lambda_1 \geq 0, \lambda_2\ \text{は偶数})$$
$$= p(n \,|\, \text{和因子は}\ \{2,3\}\ \text{に属す})$$

を示せ．(難易度：2)

48. もう少しひねりをきかせて，

$$p(n \,|\, \lambda_2 + \lambda_1,\ \text{ここで}\ \frac{3}{2}\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0)$$
$$= p(n \,|\, \text{和因子は}\ \{2,5\}\ \text{に属す})$$

を示せ．(難易度：2)

49. 和因子の属すべき集合が $\{2,3\}$ の場合に，前問の恒等式の類似を見出せ．(難易度：3)

4.2　ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式を発見する

最初の分割恒等式，オイラーの恒等式は明らかに，N を正の奇数の集合とし，左辺の条件を和因子が互いに相異なることとして，タイプ (4.1) である．

3.4 節とその演習問題で，相異なるという条件を超相異なる，超々相異なるという条件に一般化した．これは，どの 2 つの和因子も 2 以上，ないしは，3 以上の差があるという意味であった．この用語はまもなく不要になる．任意の正整数 d に対し，どの 2 つの和因子も d 以上の差があるということを表すために，**d-差的**という用語を用意しておくと便利である．$d = 0$ という特別な場合には，和因子が 0-差的であるとは，各サイズの和因子は高々 2 つであることだと定義する．

$n = 1, 2, \cdots, 11$ に対して 2-差的な和因子への分割の表を作ろう．

n	個数	n の 2-差的な和因子への分割
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	$4, 3+1$
5	2	$5, 4+1$
6	3	$6, 5+1, 4+2$
7	3	$7, 6+1, 5+2$
8	4	$8, 7+1, 6+2, 5+3$
9	5	$9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+3+1$
10	6	$10, 9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 6+3+1$
11	7	$11, 10+1, 9+2, 8+3, 7+4, 7+3+1, 6+4+1$

この表を用いれば，$p(n\,|$ 和因子は N に属す$) = p(n\,|$ 和因子は 2-差的$)$ を満たす集合 N を，第 2 章でオイラーペアを構成したのと同様にして，一意的なやり方で構成することを試みることができる．まず，$N := \varnothing$ として始めよう．

(1) 1 の分割は 1 個である．$N = \varnothing$ では分割を作れないから，N に 1 を追加する必要がある．

(2) 2 の分割も 1 個である．$N = \{1\}$ から分割 $(1+1)$ が作れるから，N に 2 を追加してはいけない．

(3) 3 の分割も 1 個である．$N = \{1\}$ から分割 $(1+1+1)$ が作れるから，N に 3 を追加してはいけない．

(4) 4 の分割は 2 個ある．$N = \{1\}$ からは分割 $(1+1+1+1)$ しか作れないから，N に 4 を追加する必要がある．

(5) 5 の分割も 2 個である．$N = \{1,4\}$ から 2 個の分割 $(4+1, 1+1+1+1+1)$ が作れるから，N に 5 を追加してはいけない．

(6) 6 の分割は 3 個である．$N = \{1,4\}$ からは 2 個の分割 $(4+1+1, 1+1+1+1+1+1)$ しか作れないから，N に 6 を追加する必要がある．

(7) 7 の分割も 3 個である．$N = \{1,4,6\}$ から 3 個の分割 $(6+1, 4+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1)$ が作れるから，N に 7 を追加してはいけない．

(8) 8 の分割は 4 個である．$N = \{1,4,6\}$ から 4 個の分割 $(6+1+1, 4+4, 4+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1)$ が作れるから，N に 8 を追加してはいけない．

(9) 9 の分割は 5 個である．$N = \{1,4,6\}$ から 4 個の分割 $(6+1+1+1, 4+4+1, 4+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1+1)$ しか作れないから，N に 9 を追加する必要がある．

このようにして，和因子として許される整数の数列は $1,4,6,9$ から始まり，同様の議論を続けると，さらに $11,14,16,19,21,24,\cdots$ と続くことが分かる．この数列は，最後の 2 つの項に 5 を足すと，次の 2 つの項が現れるようになっている．したがって，この数の集合は 5 で割った余りが 1 または 4 となる正整数の集合だということができる．このような数 m は 5 **を法として 1 または 4 に合同**だといわれ，数学の記号では

$$m \equiv 1 \text{ または } 4 \pmod 5$$

と表される[1]．したがって，以上の考察から次の分割恒等式を予想することができる．

$$p(n \mid \text{和因子} \equiv 1 \text{ または } 4 \pmod 5) = p(n \mid \text{和因子は 2-差的}) \qquad (4.2)$$

恒等式 (4.2) が，第 1 章の終わりで言及したロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式である．上の議論は，すべての $n \geq 0$ に対してこの恒等式を証明するものではないことは強調しておかねばならない．われわれが確認した限りでは正しかったというだけである．すべての n についてあてはまる証明が与えられない限り，もっと大きな n に対して恒等式が成り立たないという可能性がつねに残るのである．

とはいうものの，上で述べた実験的方法は，成立が予想される分割恒等式を発見するための強力な道具である．ラマヌジャンが用いた方法はまずこれではないだろうが (彼は，分割そのものを直接扱うよりは，ずっと母関数の方法に夢

[1] 一般に，整数 a, b, n $(n \neq 0)$ に対し，a を n で割った余りと b を n で割った余りが等しいとき，より正確には，$a-b$ が n で割り切れるとき，a と b は n を法として合同であるといい，$a \equiv b \pmod n$ と記す．

中であったから)，4.4 節で解説される定理をシューアが発見したときにこの方法を用いたことはかなり確かである．小さな n に対しては手計算も可能だが，この方法はじつにコンピュータ向きである．この方法を試して，整数の分割の理論における一連の偉大な結果を再発見してみることをおすすめする．

演習問題

50. 和因子が 2 以上で，かつ，2-差的な分割に関するロジャース–ラマヌジャンの第 2 恒等式を再発見せよ．すなわち，

$$p(n\,|\,\text{和因子は } N \text{ に属す}) = p(n\,|\,\text{和因子は 2 以上で 2-差的})$$

を成り立たせるような整数の集合 N を発見せよ．(難易度：1)

51. 和因子が 2-差的で，連続する 2 の倍数を含まない ($2k$ が和因子なら $2k+2$ は和因子ではない) ような分割に関するゲルニッツ–ゴードンの恒等式を再発見せよ．(難易度：2)

52. 和因子が 3 以上，かつ，2-差的で，さらに連続する 2 の倍数を含まないような分割に関するゲルニッツ–ゴードンの恒等式を再発見せよ．(難易度：2)

53. 和因子が 3-差的で，さらに連続する 3 の倍数を含まないような分割に関するシューアの恒等式を再発見せよ．(難易度：1)

54. 和因子が 2 以上，かつ，同じ和因子は高々 2 回しか現れず，さらに k が和因子として 2 回現れたら $k\pm1$ は和因子でないような分割に関するゴードンの恒等式を再発見せよ．(難易度：2)

55. どの和因子も 2 以上で，奇数和因子は (a) 互いに相異なる，(b) 次に小さい和因子との差は 3 以上，の 2 条件を満たしているような分割に関するアンドリュースの恒等式を再発見せよ．(難易度：2)

恒等式の探索にコンピュータを使う方法は，1960 年代の後期にさかのぼる．

「ロジャース–ラマヌジャン型恒等式の探索における計算機の利用」というタイトルの論文 (Andrews, 1971b) でそのような探索の概要が初めて紹介され，その探索の頂点としてシューアの定理の新版が与えられた．続いて (Andrews, 1978) においてこの探索技法はさらに洗練され，多くの恒等式が発見された．

4.3 アルダーの予想

ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式は，和因子が 5 を法として 1 または 4 と合同になるような分割を扱っていた．$-1+5=4$ だから，4 は法 5 で -1 と合同である．したがって，もっと簡潔に，和因子が $\pm1 \pmod 5$ と合同になる分割といってもよい．すると，次のような魅惑的なパターンが見えてくる．

- 第 2 章の演習問題 5 により，和因子が 3 で割り切れないような分割は，同じ和因子は高々 2 回しか現れないような分割と同数ある．整数が 3 で割り切れなければ，その余りは 1 か 2 であり，したがって，その整数は $\pm1 \pmod 3$ と合同である．よって，この恒等式は

$$p(n\,|\,\text{和因子は } \pm1 \pmod 3 \text{ と合同}) = p(n\,|\,\text{和因子は 0-差的})$$

  と表せる．

- オイラーの恒等式により，奇数和因子への分割は，和因子が互いに相異なるような分割と同数ある．整数が奇数であるということは，4 で割った余りが 1 か 3 だということである．したがって，オイラーの恒等式は

$$p(n\,|\,\text{和因子は } \pm1 \pmod 4 \text{ と合同}) = p(n\,|\,\text{和因子は 1-差的})$$

  と表せる．

- ロジャース–ラマヌジャンの恒等式は

$$p(n\,|\,\text{和因子は } \pm1 \pmod 5 \text{ と合同}) = p(n\,|\,\text{和因子は 2-差的})$$

  を主張していた．

この共通するパターンを見ると，任意の負でない整数 d に対して，和因子が $\pm1 \pmod{d+3}$ と合同であるような分割の個数と和因子が d-差的な分割の個数との間に等式が成り立つと予想したくなる．次に調べてみるべき場合は $d=$

3 である．$\pm 1 \pmod 6$ と合同な和因子は $1, 5, 7, 11, \cdots$ である．分割を表すのに，各和因子の現れる回数をベキ指数の形で表すと，短く記述できて便利である．例えば，$7+7+5+1+1+1+1$ ならば $7^2 5^1 1^4$ と書ける．

n	和因子が $\{1, 5, 7, 11, \cdots\}$ に属す分割	n の 3-差的な和因子への分割
1	1^1	1
2	1^2	2
3	1^3	3
4	1^4	4
5	$1^5, 5^1$	$5, 4+1$
6	$1^6, 5^1 1^1$	$6, 5+1$
7	$1^7, 5^1 1^2, 7^1$	$7, 6+1, 5+2$
8	$1^8, 5^1 1^3, 7^1 1^1$	$8, 7+1, 6+2$
9	$1^9, 5^1 1^4, 7^1 1^2$	$9, 8+1, 7+2, 6+3$

$n=9$ で起きていることに気が付いただろうか．和因子が $\{1, 5, 7, 11, \cdots\}$ に属す分割は 3 通りであるにもかかわらず，3-差的な和因子への分割は 4 通りある．かくして，われわれのすばらしい予想は注意深い検証には耐えられなかった．

だが，ひょっとすると，和因子が $\pm 1 \pmod{d+3}$ と合同だという条件をつけたのが間違いだったのではないだろうか．和因子の属すべき集合として何か別の集合があって，それは $d=0,1,2$ については $\pm 1 \pmod{d+3}$ と合同な整数の集合と一致するようになっていた，そういうこともありうるのではないだろうか．

しかし，これも空しい希望であることが分かる．レーマーは，$p(n|$和因子は d-差的$)$ と $p(n\,|$ 和因子は N に属す$)$ がすべての $n>0$ に対して等しくなるような集合 N は，$d \geq 3$ に対しては存在しないことを証明した．アルダーはもともとの予想を不等式

$$p(n\,|\,\text{和因子は} \pm 1 \pmod{d+3} \text{と合同}) \leq p(n\,|\,\text{和因子は } d\text{-差的})$$

$$(n, d \geq 0)$$

の形に弱めた．d が $2^k - 1$ の形の整数の場合には (7 は例外の可能性があるが)，この不等式がつねに成立していることをアンドリュース (Andrews 1971a) が示している．この特殊な場合を除くと，アルダーが予想した不等式は今日でも未解決問題である．証明も反例も見つかっていない．これらの数についての膨大な表は $n \geq d + 6 \geq 14$ に対しては不等式が鋭い (すなわち，$\leq$ を $<$ で置き換えてよい) ことを示唆している．

演習問題

56. 集合 N の構成を試してみると失敗に終わることを示すことにより，レーマーの結果を $d = 3$, $d = 4$ に対して証明せよ．(難易度：2)
57. アルダーの予想を証明するには，分割に対するどのような変換があればよいだろうか．(難易度：2)
58. 差

$$p(n \mid \text{和因子は } d\text{-差的}) - p(n \mid \text{和因子は } \pm 1 \pmod{d+3} \text{ と合同})$$

を計算するコンピュータプログラムを書き，得られたデータからパターンを見出して，予想のあなた自身による精密化を発見しよう．
(難易度：3)

4.4 シューアの定理

第 1 次世界大戦のさなか，イギリスにおける数学の発展とは切り離された状態で，シューアはドイツで机に向かい独自に，整数の分割の理論における新天地を切り開く研究を行っていた．シューアは，ロジャース–ラマヌジャン恒等式を発見・証明したばかりでなく，1926 年には d が 3 のときに破綻した予想を修正する正しい道をも発見した．ポイントは，和因子が $\pm 1 \pmod 6$ に合同という条件をいじるのではなく，2-差的な和因子への分割からある部分集合を除外することであった．

定理 4.1　任意の正整数 n に対し，$\pm 1 \pmod 6$ に合同な和因子への分割の個数は，和因子が 3-差的で連続する 3 の倍数を含まないような分割の個数に等しい．

この定理は，誤った予想

$$p(n \mid \text{和因子は } \pm 1 \pmod 6 \text{ と合同}) = p(n \mid \text{和因子は 3-差的})$$

がなぜ $n = 9$ になるまでは成り立っていたのかを説明している．9 は，連続する 3 の倍数を含むような和因子への分割 (すなわち，$6+3$) が現れる最初の数だったのである．

定理の証明にあたって，シューアはまず左辺は

$$\begin{aligned} &p(n \mid \text{和因子は } \pm 1 \pmod 6 \text{ と合同}) \\ &\qquad = p(n \mid \text{和因子は相異なり } \pm 1 \pmod 3 \text{ と合同}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

と書き直せることに注目した．正整数の集合

$$\{1, 5, 7, 11, \cdots\} \text{ と } \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \cdots\}$$

とはオイラーペアをなしているからである．(なぜか．演習問題 59.) 次にシューアは，この等式の右辺が $p(n \mid \text{和因子は 3-差的で，連続する 3 の倍数を含まない})$ に等しいことのいささかこみいった証明を与えた．それ以来，何人もの数学者がさまざまな別証明を与えてきた．その中の 1 つが，次のブレスードによる賞賛すべき巧妙な全単射である．

$\pm 1 \pmod 3$ と合同で互いに相異なる和因子への分割 P から出発し，それを最小の和因子から始めて高々 2 だけ異なる和因子のペアを融合させることにより新しい分割 P_1 へと変換する．和因子は縦一列に並べて書いておくのが便利である．例えば，

$$P = \begin{matrix} 11 \\ 10 \\ 8 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \quad \longmapsto \quad P_1 = \begin{matrix} 11 \\ 10+8 \\ 5 \\ 2+1 \end{matrix}$$

となる．融合されたペアは 3 の倍数となり，このやり方で連続する 3 の倍数が現れることはない (なぜか?)．実際，2 つの 3 の倍数の間に i 個の数があったとすると，このときこの 2 つの倍数の差は少なくとも $3(2+i)$ 以上である (なぜか)．

次に P_1 の各和因子から連続する 3 の倍数を，一番下の和因子からは 0，次は 3，と順次引いていく．引いた 3 の倍数は右側に新しい列として書いておく．

$$P_1 = \begin{matrix} 11 \\ 10+8 \\ 5 \\ 2+1 \end{matrix} \quad \longmapsto \quad P_2 = \begin{matrix} 11-9 & 9 \\ 10+8-6 & 6 \\ 5-3 & 3 \\ 2+1-0 & 0 \end{matrix}$$

P_2 の第 1 列を大きさの順に並べなおす．

$$P_2 = \begin{matrix} 11-9=2 & 9 \\ 10+8-6=12 & 6 \\ 5-3=2 & 3 \\ 2+1-0=3 & 0 \end{matrix} \quad \longmapsto \quad P_3 = \begin{matrix} 12 & 9 \\ 3 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

最後に P_3 の 2 つの列を足し合わせる．

$$P_3 = \begin{matrix} 12 & 9 \\ 3 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} \quad \longmapsto \quad P_4 = \begin{matrix} 21 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

この変換の結果として得られる P_4 の和因子は 3-差的で，連続する 3 の倍数は現れない (なぜか?)．このようにして，4 つの簡単な変換を合成して得られる変換は，和因子が $\pm 1 \pmod 3$ と合同で互いに相異なる分割 P を和因子が 3-差的で，しかも，連続する 3 の倍数が現れないような分割 P_4 にうつす．以下で議論するように，この変換は可逆である．したがって，それは全単射であり，シューアの定理が証明された．

この全単射は上に述べた方向では非常に簡単に説明できた．しかし，逆方向の変換がいかに働くのかを説明するのはかなり面倒である．そこで，可逆性の証明は，意欲的な読者のための演習問題として残すことにする．

演習問題

59. $N = \{1, 5, 7, 11, \cdots\}$ と $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \cdots\}$ はオイラーペアであることを示せ．(難易度：2)

60. P_1 から P_4 への変換は次のゲームと同等であることを証明せよ．ある数がそのすぐ下の数より 3 以上大きくないとき，その数から 3 を引き，下の数に 3 を足し，この 2 つの数の位置を入れ替える．明らかに，ゲームは大きい順に並んだ 3-差的な和因子への分割に到達して終了する．例えば，

$$P_1 = \begin{array}{l} \underline{11} \\ 18 \\ 5 \\ 3 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{l} 18+3=21 \\ 11-3=8 \\ \underline{5} \\ 3 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{l} 21 \\ \underline{8} \\ 3+3=6 \\ 5-3=2 \end{array}$$

$$\longmapsto \quad \begin{array}{l} 21 \\ 6+3=9 \\ 8-3=5 \\ 2 \end{array} = P_4$$

(難易度：2)

61. 上のゲームは次のルールに従えば逆戻りできる，なぜか説明せよ．まず，P_4 の和因子のうち 3 の倍数であるものを高々 2 しか違わないような和

異なる
1 = 4 + 2

因子のペアに分解する.

$$P_4 = \begin{matrix} 21 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \quad \longmapsto \quad P_4' = \begin{matrix} 11,10 \\ 5,4 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

これで，どの和因子も 3 の倍数ではなくできる．あるペアのうちの小さい方が，その下の和因子より 3 以上大きくないときには，そのペアの大きい方から 3 を引き，下の和因子に 3 を加えて，位置を入れ替える．明らかに，このゲームは，3 の倍数を含まない分割に到達して終了し，その際，最小の和因子から始めて高々 2 しか違わない和因子がペアになっている．

$$P_4' = \begin{matrix} 11,10 \\ \underline{5,4} \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \quad \longmapsto \quad \begin{matrix} 11,10 \\ 8 \\ \underline{4,2} \\ 2 \end{matrix} \quad \longmapsto \quad \begin{matrix} \underline{11,10} \\ 8 \\ 5 \\ 2,1 \end{matrix}$$

$$\longmapsto \quad \begin{matrix} 11 \\ 10,8 \\ 5 \\ 2,1 \end{matrix} = P$$

(難易度：3)

62. ±1 (mod 3) に合同で互いに相異なる和因子への分割 P から出発して変換 $P \mapsto P_4$ を行うと，和因子が 3-差的で連続する 3 の倍数を含まないような分割が得られ，またそれ以外の分割は得られない．上の問題を通して得た認識を総合して，その理由を説明せよ．(難易度：2)

どうやら多くの予期せぬ分割恒等式が存在するようだから，新たな思いがけない出会いを期待して，シューアの定理に似た恒等式をもっと見つけてみよう

とするのも自然な流れだろう．例えば,「3-差的で連続する 3 の倍数を含まない」という条件を「2-差的で連続する 2 の倍数を含まない」としてみるとか．実際，ゲルニッツとゴードンが独立に発見した定理によれば，この条件を満たす分割の個数は $1, 4, 7 \pmod 8$ に合同な和因子への分割の個数に等しい．

しかし，安直な一般化は成り立たない．アルダーは，すべての $n \geq 0$ に対して

$$p(n \mid \text{和因子は } d\text{-差的で，連続する } d \text{ の倍数を含まない}) \\ = p(n \mid \text{和因子は } N \text{ に属す})$$

を成り立たせるような集合 N は，$d > 3$ のときには存在しないことを示した．

演習問題

63. $d = 1$ に対しては，アルダーの条件を満たす N が存在する．それはどのような集合か．(難易度：2)
64. $d = 4$ に対して，条件を満たす N を構成しようとする試みは必ず失敗に終わることを示すことにより，アルダーの結果を証明せよ．(難易度：1)

4.5　ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式の全単射法による証明を求めて

これまで多くの恒等式に対する全単射法による証明を見てきた．2 つの分割の集合の間に全単射があれば，自動的に分割恒等式が導かれる．しかし，その逆は真実には程遠い．分割恒等式が与えられたとき，全単射を構成するための機械的方法は存在しない．今までにこの本で与えた全単射にもさまざまなタイプのものがあった．共役，融合・等分，フェラーズグラフの対角線の移動，2 列に分けて順序を変える，等々．

正しいことが知られている分割恒等式に全単射法による証明を与えることがどれほど難しいか，その気分を味わってもらうために，ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式に挑戦してみよう．次の表は，この恒等式が個数が等しいと主張している 2 種類の分割のリストを $n = 1, 2, \cdots, 10$ に対して書き上げたものである．

n	和因子が $\{1, 4, 6, 9, 11, \cdots\}$ に属す分割	n の 2-差的な和因子への分割
1	1^1	1
2	1^2	2
3	1^3	3
4	$1^4, 4^1$	$4, 3+1$
5	$1^5, 4^1 1^1$	$5, 4+1$
6	$1^6, 4^1 1^2, 6^1$	$6, 5+1, 4+2$
7	$1^7, 4^1 1^3, 6^1 1^1$	$7, 6+1, 5+2$
8	$1^8, 4^1 1^4, 6^1 1^2, 4^2$	$8, 7+1, 6+2, 5+3$
9	$1^9, 4^1 1^5, 6^1 1^3, 4^2 1^1, 9^1$	$9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+3+1$
10	$1^{10}, 4^1 1^6, 6^1 1^4, 4^2 1^2, 9^1 1^1, 6^1 4^1$	$10, 9+1, 8+2, 7+3, 6+3+1, 6+4$

この表の新しい行を作り出すには，まず始めに，最後の行に出てきている分割のそれぞれに，左の列では和因子として 1 を付け加え，一方，右の列では最大の和因子に 1 を加えればよい．新しくできる分割は明らかにそれぞれの条件を満たしている．続いて，左の列では $4, 6, 9, 11, \cdots$ だけを用いてできる分割を付け加え，右の列ではもっとも大きい 2 つの和因子の差がちょうど 2 である分割を付け加えねばならない．

これは，全単射を作る試みの手がかりとしてなかなか有望そうである．左の列の分割を右の列の分割へと変換する際に，和因子 1 をどう取り扱ったらいいか，そのアイディアがここに見えている．1 を除いた残りの分割を，和因子が 2-差的で，もっとも大きい 2 つの和因子の差がちょうど 2 であるような分割に変換しておいてから、その最大の和因子にすべての 1 をまとめて加えるのである．

次に 1 を除いた残りの分割をどう変換したらよいかを考えなくてはいけない．表を見ると，

$$
\begin{array}{lcl}
4 & \longmapsto & 3+1 \\
6 & \longmapsto & 4+2 \\
9 & \longmapsto & 5+3+1 \\
4^2 & \longmapsto & 5+3 \\
6^1 4^1 & \longmapsto & 6+4
\end{array}
$$

となるべきである．明らかに，和因子 4 をすべて $3+1$ のまとまりに変換するのは不適当である．4^2 が $6+2$ に変換されてしまうからである．4^2 における 2 つ目の 4 や $6^1 4^1$ における 4 は $2+2$ に変換すべきだと思われる．では，単独の 4 はルールの例外とし，残りすべての 4 は $2+2$ に変化することにしよう．表をさらに何行か延長し，和因子の変換がどのようなルールに従わねばならないか，推測を続けることができる．

ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式に対する全単射を求めて，数え切れない数学者がこの道を歩んだ．始めは前途有望に見える．だが，進むにつれ，変換の手続きにますます多くの特殊なルールを付け加えねばならなくなる．そしてついには，素直な道筋はまったく見えなくなる．あきらめる潮時だ．

放浪の天才数学者ポール・エルデシュ[2)]はロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式の全単射法による説明の難しさをよく認識していた．彼は，数学の難問解決において 20 世紀を通じても第 1 級の能力を示していたが，同時に，他の数学者に対して挑戦すべき問題を提出することを好んだ．エルデシュは，自分が判定した問題の難易度に応じて 10 ドルから 3000 ドルまでの値札をつけて，公表された解答への賞金とした．彼は 1996 年に 83 才で息を引き取った．それらの問題のうちのいくつかはエルデシュの生存中に解決されたが，残された問題については，エルデシュの研究仲間であり古くからの友人であるロン・グラハムとファン・チュン，そして銀行家でアマチュア数学者のアンドリュー・ビールが賞金の保証を引き継いでいる．

アンドリュースは (エルデシュを真似して) ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式の全単射法による証明に 50 ドルの賞金を懸けた．アンドリュースはし

---

2) その生涯については，『放浪の天才数学者エルデシュ』(ポール・ホフマン著平石律子訳，草思社，2000) に詳しい．

ばしば自分が提出した挑戦への支払いでふところを痛めてきたが，これも例外ではなかった．だが，最初に公表された解答は，本書で見てきた多くの例とは違って，簡単に述べられる全単射と言えるものではなかった．この解答は，アドリアノ・ガルシアとステファン・ミルンによる 50 ページに及ぶ論文で発表された．その中で彼らは，全単射を反復して構成する自己反転原理とよばれる新しい方法を発明した．デヴィッド・ブレスードとドロン・ザイルバーガーは，アイディアは同じだが証明をなんと 2 ページにまで絞り込んでしまった．それでもなお，ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式を説明する直接的な全単射を与えられるかどうかということは，未解決の刺激的な問題である．

何度か述べたように，これらすべての古典的分割恒等式の発見者 —オイラー，ロジャーズ，ラマヌジャン，シューア— が用いた証明法は全単射法ではなかった．しかし，分割のある集合が他の集合と同じ大きさであることを，それらの間の全単射を示すことなしに，どうやって結論できるのだろうか．次の章でこのことを見る．

演習問題

65. ロジャース–ラマヌジャン全単射を求める上の試みを，分割の表を $n = 20$ にまで延長して継続せよ．(難易度：1)
66. 全単射法による完全な証明を見出せ．(難易度：> 3)

4.6 ロジャース–ラマヌジャン恒等式の衝撃

われわれは，ロジャース–ラマヌジャンや他の分割恒等式を，もっぱらそれ自身への興味から調べてきたが，それによって，これらが狭い興味の対象にすぎないという印象を抱かせたとしたら誤りである．B. マッコイは国際数学者会議での講演で (A. ベルコヴィッチとの共著論文 (A. Berkovich and B.M. McCoy 1998) として発表) 物理学への応用の概説を与えている．加えて，分割恒等式

と他の組み合わせ論的モデルとの実り豊かな相互作用の概要は，(K. Alladi, 1995) にまとめられている．さらなる驚くべき深い発見を予感させる仕事として (K. Alladi 他，2003) がある．

第 5 章

母関数

最初の 4 つの章では，読者を整数の分割の純粋に算術的組合せ論的研究へ導き入れた．第 2 章では，18 世紀のレオンハルト・オイラーによる発見を解説した．しかし，その章で用いた方法はどれもオイラーのものではなく，ただ結果だけがオイラーによる．

実際，オイラーによる分割の取り扱い方は，主として母関数を利用するものであった．それがこの章の話題である．

この章のポイント

- 母関数とは，数列をすべて記憶しておく役目を果たすベキ級数である．
- 第 2 章のオイラーの定理を母関数を用いて表現し，別証明を与えることができる．
- オイラーの 5 角数定理を母関数のことばで書き直すと，分割関数 $p(n)$ の再帰的関係式が得られる．
- ロジャース–ラマヌジャンの恒等式も母関数のことばで書き直すことができる．

5.1　積型の母関数

母関数のアイディアは，そのもっとも素朴な形では，よく知られた指数法則，すなわち，

$$q^r q^s = q^{r+s} \tag{5.1}$$

に基づいている．代数のこの基本原理を次のようなやり方で利用することができる．例えば，6 以下の偶数と奇数とをそれぞれ 1 個ずつ和因子として含む分割をすべて求めたいと思ったとしよう．全部書き上げてしまおうとすれば，それも可能である (全部で 9 個しかない)．しかし，それらの分割は次の多項式の積の中に自然に現れてきている．

$$\begin{aligned}(q^2 + q^4 + q^6)&(q + q^3 + q^5)\\ &= q^{2+1} + q^{2+3} + q^{2+5} + q^{4+1} + q^{4+3} + q^{4+5} + q^{6+1} + q^{6+3} + q^{6+5}\\ &= q^3 + 2q^5 + 3q^7 + 2q^9 + q^{11}\end{aligned}$$

2 行目の式のベキ指数として，6 以下の偶数と奇数とを 1 個ずつ和因子として含む分割がすべて登場していることに注目しよう．このことは，(5.1) と多項式の掛け算規則からただちに説明される．

演習問題

67. 多項式の掛け算

$$(q^1 + q^3 + q^5 + q^7)(q^2 + q^4 + q^6 + q^8)$$

を計算し q^9 の係数を見ることによって，9 の分割で偶数と奇数を 1 個ずつ和因子として含むものの個数を求めよ．
(難易度：1)

68. 演習問題 67 の答えをただちに見抜くことができただろうか．10 や 11 について同様の分割を考えたら，その個数はいくつになるか．
(難易度：1)

69. 多項式 $a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_r q^r$ で，係数がすべての $n \geq 0$ に対し

$a_n = p(n \mid$ 和因子は 2 つ，一方は ≤ 100，他方は $101 \leq$ かつ ≤ 200)

となるものは，どんな多項式か．なるべく上手な書き表し方を工夫せよ．(難易度：1)

この単純なアイディアは，もっと一般の分割に対しても容易に拡張することができる．例えば，$S = \{n_1, \cdots, n_r\}$ を r 個の正整数からなる有限集合とする．$r = 3$ ならば，

$$
\begin{aligned}
&(1+q^{n_1})(1+q^{n_2})(1+q^{n_3}) \\
&\quad = 1 + q^{n_1} + q^{n_2} + q^{n_3} + q^{n_1+n_2} \\
&\qquad + q^{n_1+n_3} + q^{n_2+n_3} + q^{n_1+n_2+n_3}
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

には，和因子が $\{n_1, n_2, n_3\}$ に属し互いに相異なるようなすべての分割が，ベキ指数として現れている．

もっと具体的にすると，$S = \{1, 2, 3\}$ ならば，多項式 (5.2) は

$$
1 + q + q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5 + q^6 \tag{5.3}
$$

となる．

この関数 (いまの場合は多項式だが) を，和因子が $\{1, 2, 3\}$ に属し互いに相異なる分割の**母関数**という．q^n の係数は，その条件を満たす n の分割の個数である．(5.3) における q^3 の係数は 2 で，それは，3 を $\{1, 2, 3\}$ から互いに異なるように和因子を取ってできる 2 つの分割 (3 と $2+1$) に対応している．

まさにこの議論によって，$S = \{n_1, \cdots, n_r\}$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n \geq 0} p(n \mid \text{和因子は } S \text{ に属し，互いに相異なる}) \\
&\quad = \prod_{i=1}^{r} (1 + q^{n_i}) = \prod_{n \in S} (1 + q^n)
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

が結論される．

次に同じ整数を和因子として d 回まで繰り返して使ってよいとしよう．例えば，$d=3$, $S=\{n_1,n_2\}$ ならば，

$$
\begin{aligned}
&(1+q^{n_1}+q^{n_1+n_1}+q^{n_1+n_1+n_1})(1+q^{n_2}+q^{n_2+n_2}+q^{n_2+n_2+n_2})\\
&\quad =1+q^{n_2}+q^{n_2+n_2}+q^{n_2+n_2+n_2}+q^{n_1}+q^{n_1+n_2}+q^{n_1+n_2+n_2}\\
&\qquad +q^{n_1+n_2+n_2+n_2}+q^{n_1+n_1}+q^{n_1+n_1+n_2}+q^{n_1+n_1+n_2+n_2}\\
&\qquad +q^{n_1+n_1+n_2+n_2+n_2}+q^{n_1+n_1+n_1}+q^{n_1+n_1+n_1+n_2}\\
&\qquad +q^{n_1+n_1+n_1+n_2+n_2}+q^{n_1+n_1+n_1+n_2+n_2+n_2}\\
&\quad =\sum_{n\geq 0} p(n\,|\,\text{和因子は }\{n_1,n_2\}\text{ に属し，同じ和因子は高々 3 回まで})\,q^n
\end{aligned}
$$

である．一般には，$S=\{n_1,\cdots,n_r\}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} p(n\,|\,\text{和因子は }S\text{ に属し，同じ和因子は高々 }d\text{ 回まで})\,q^n\\
&\quad =\prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}+q^{n_i+n_i}+\cdots+q^{\overbrace{n_i+n_i+\cdots+n_i}^{d\text{ 回}}})\\
&\quad =\prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+\cdots+q^{dn_i})\\
&\quad =\prod_{i=1}^{r}\frac{(1-q^{(d+1)n_i})}{(1-q^{n_i})}=\prod_{n\in S}\frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^n}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

が得られる．ここで，(5.5) の最後の行の変形には，等比数列の和の公式

$$
\sum_{j=0}^{N} x^j=\frac{1-x^{N+1}}{1-x} \tag{5.6}
$$

を用いた．

もちろんわれわれは，同じ和因子を何回でも繰り返し使えるように (すなわち，$d\to\infty$ と) したい．(5.5) の議論は，$|q|<1$ と仮定するならば，依然成り立っている (変数 q は係数を各 n ごとに記帳しておくためにのみ導入されたのであり，q 自身の値はどうでもよいのだから，$|q|<1$ と制限してもいっこうにかまわない)．よって，$|q|<1$ に対し，

$$\sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{和因子は } S \text{ に属す})\, q^n = \prod_{i=1}^{r} (1 + q^{n_i} + q^{2n_i} + q^{3n_i} + \cdots)$$
$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1 - q^{n_i}} = \prod_{n\in S} \frac{1}{1 - q^n} \qquad (5.7)$$

となる．ここでは，無限等比級数の和の公式

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

を適用した．

有限個の絶対収束する無限級数の積はまた絶対収束する無限級数になるから，r 個の無限等比級数の積をとることは，まったく正当なことである．

演習問題

70.
$$\frac{1}{(1-q^5)(1-q^{10})(1-q^{25})}$$

は，n セントをニッケル (5 セント硬貨)，ダイム (10 セント硬貨)，クォータ (25 セント硬貨) で払う支払い方の個数の母関数である．なぜか．もし，ペニー (1 セント硬貨) と 1 ドル札 (100 セント) も使ってよいとすると，母関数はどのようになるか．(難易度：1)

次に S が正整数の無限集合となる場合を考えよう．等式 (5.4), (5.5), (5.7) の両端の式は S の有限性とは関係ない形をしている．したがって，S が無限集合でも同じ式が成立すると期待してよさそうだ．言い換えると，正整数からなる任意の集合 S に対して，

$$\sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{和因子は } S \text{ に属し互いに相異なる})\, q^n = \prod_{n\in S} (1 + q^n),$$

$$\sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{和因子は } S \text{ に属し，同じ和因子は高々 } d \text{ 回まで})\, q^n$$
$$= \prod_{n\in S} \frac{(1 - q^{(d+1)n})}{(1 - q^n)},$$

$$\sum_{n\geq 0} p(n \,|\, \text{和因子は } S \text{ に属す})\, q^n = \prod_{n\in S} \frac{1}{1-q^n}, \quad |q|<1$$

が成立すると考えられる．(5.4), (5.5), (5.7) を見れば，そのもっともらしさは明らかであろう．これらの等式が実際に正しいことの証明は，演習問題とする．無限積の収束に関する諸性質については，付録 A を参考にするとよい．

演習問題

71. 以下の問題では，S は正整数からなる無限集合であり，

$$S = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots\}$$

と書いたら，小さいものから順に並んでいるものとし，

$$S_m = \{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$$

とおく．このとき，

$$p(n \,|\, \text{和因子は } S_m \text{ に属す}) \leq p(n \,|\, \text{和因子は } S \text{ に属す})$$

を示せ．(難易度：1)

72. $n \leq n_m$ ならば，

$$p(n \,|\, \text{和因子は } S_m \text{ に属す}) = p(n \,|\, \text{和因子は } S \text{ に属す})$$

であることを示せ．(難易度：1)

73. $$\lim_{m\to\infty} p(n \,|\, \text{和因子は } S_m \text{ に属す}) = p(n \,|\, \text{和因子は } S \text{ に属す})$$

を示せ．(難易度：1)

74. $$\begin{aligned}\mathcal{P}_m(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n \,|\, \text{和因子は } S_m \text{ に属す})\, q^n \\ &= \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-q^{n_i}}\end{aligned}$$

とおくとき，

$$\mathcal{P}_m(q) = \sum_{n=0}^{n_m} p(n \mid \text{和因子は } S \text{ に属す})\, q^n + \sum_{n=n_m+1}^{\infty} p(n \mid \text{和因子は } S_m \text{ に属す})\, q^n$$

が成り立つことを示せ．(難易度：1)

75. q が実数で $0 < q < 1$ のとき，

$$\mathcal{P}(q) = \prod_{n \in S} \frac{1}{1-q^n}$$

は絶対収束する無限積であることを証明せよ．(付録 A，主張 2 参照) (難易度：2)

76. $$\sum_{n=0}^{n_m} p(n \mid \text{和因子は } S \text{ に属す})\, q^n < \mathcal{P}_m(q) < \mathcal{P}(q)$$

であることを示せ．(難易度：2)

77. q が実数で $0 < q < 1$ のとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{和因子は } S \text{ に属す})\, q^n = \mathcal{P}(q)$$

であることを示せ．(難易度：2)

5.2 オイラーの定理

第 2 章で証明したオイラーの定理は

$$p(n \mid \text{和因子は奇数}) = p(n \mid \text{和因子は相異なる}) \tag{5.8}$$

を主張していた．これらの分割に関連する母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n \mid \text{和因子は相異なる})\, q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n) \quad ((5.4)\text{ より})$$

および

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n\,|\,\text{和因子は奇数})\,q^n = \prod_{n\ \text{奇数}} \frac{1}{1-q^n}$$

を考えよう．明らかに，

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)\\
&\quad = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1+q^6)\cdots\\
&\quad = \left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1-q^2}\right)\left(\frac{1-q^6}{1-q^3}\right)\left(\frac{1-q^8}{1-q^4}\right)\left(\frac{1-q^{10}}{1-q^5}\right)\left(\frac{1-q^{12}}{1-q^6}\right)\cdots\\
&\quad = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} \quad (\text{分母，分子の共通因数を約す})\\
&\quad = \prod_{n\ \text{奇数}} \frac{1}{1-q^n}
\end{aligned}$$

である．したがって，母関数が一致するから，すべての $n \geq 0$ に対し等式 (5.8) は成り立つ．

積のこのような代数的操作によって (5.8) に類似した定理を無数に証明できる．例えば，

$$p(n\,|\,i\ \text{が和因子に現れる回数は}\ i\ \text{回未満})$$
$$= p(n\,|\,\text{完全平方数は和因子に現れない})$$

を証明しよう．まず，例を見てみよう．$n = 9$ に対して左辺のタイプの分割は $(9, 7+2, 6+3, 5+4, 4+3+2)$ の 5 個，右辺のタイプの分割は $(7+2, 6+3, 5+2+2, 3+3+3, 3+2+2+2)$ の 5 個である．

証明は，上で与えた (5.8) の証明の真似をすればよい．

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} p(n\,|\,i\ \text{が和因子に現れる回数は}\ i\ \text{回未満})\,q^n\\
&\qquad = \prod_{i=1}^{\infty}(1+q^i+q^{2i}+q^{3i}+\cdots+q^{(i-1)i})\\
&\qquad = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1-q^{i^2})}{(1-q^i)} \quad ((5.6)\ \text{より})\\
&\qquad = \prod_{i\ \text{非平方数}}\frac{1}{1-q^i} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n\,|\,\text{完全平方数は和因子に現れない})\,q^n.
\end{aligned}$$

演習問題

78. (Subbarao, 1971a) どの和因子の現れる回数も $2, 3$ または 5 であるような分割の個数は，和因子が $\pm 2, \pm 3, 6 \pmod{12}$ に合同な分割の個数に等しいことを示せ．(難易度：2)

79. (MacMahon, 1916) どの和因子も (現れるなら)2 回以上現れるような分割の個数は，和因子が $\pm 1 \pmod 6$ に合同でない分割の個数に等しい．(難易度：3)

5.3 2 変数母関数

ときには，分割される整数以外の情報もあわせて記憶させておく必要が生じる．分割に含まれる和因子の個数の情報を母関数から引き出したくなる場合も多い．

等式 (5.2) の例に戻ろう．しかし，今回は第 2 の変数 z を挿入して

$$
\begin{aligned}
&(1+zq^{n_1})(1+zq^{n_2})(1+zq^{n_3})\\
&\qquad = 1 + zq^{n_1} + zq^{n_2} + zq^{n_3} + z^2q^{n_1+n_2} + z^2q^{n_1+n_3}\\
&\qquad\quad + z^2q^{n_2+n_3} + z^3q^{n_1+n_2+n_3}
\end{aligned}
$$

とする．このとき，右辺での z のベキ指数は各分割において和因子が何個使われているかを示している．

この例を見れば，1 変数のときとまったく同じ方法で (5.4), (5.5), (5.7) の次の 2 変数類似を導けることは明らかであろう．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p(n \,|\, \text{和因子は相異なる } m \text{ 個の } S \text{ に属す整数}) z^m q^n\\
&\qquad = \prod_{n\in S}(1+zq^n),
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$$
\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p(n \,|\, \text{和因子は } m \text{ 個で } S \text{ に属し，それぞれ高々 } d \text{ 回現れる}) z^m q^n
$$

$$= \prod_{n \in S} \frac{1 - z^{d+1} q^{(d+1)n}}{1 - zq^n}, \tag{5.10}$$

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} p(n \mid \text{和因子は } m \text{ 個の } S \text{ に属す整数}) z^m q^n$$
$$= \prod_{n \in S} \frac{1}{1 - zq^n}. \tag{5.11}$$

S が無限集合のときには，(5.9), (5.10) では $|q| < 1$ を，(5.11) では $|q| < 1$ に加えて $|z| < \frac{1}{|q|}$ を仮定しなくてはいけない.

5.4　オイラーの 5 角数定理

第 3 章で，

$$p(n \mid \text{和因子は偶数個で相異なる}) - p(n \mid \text{和因子は奇数個で相異なる})$$
$$= \begin{cases} (-1)^j & n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{それ以外のとき}, \end{cases} \tag{5.12}$$

を証明した.

この主張は，等式 (5.9) を利用すれば，母関数についての主張に容易に翻訳される．すなわち，(5.9) で $z = -1$ とおくと，その左辺の q^n の係数は (5.12) の左辺の q^n の係数に一致する．したがって，(5.9) により，(5.12) は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(p(n \mid \text{和因子は偶数個で相異なる}) - p(n \mid \text{和因子は奇数個で相異なる}) \Big) q^n$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} (1 + q^j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \tag{5.13}$$

と言い換えられる．この (5.13) は，n の分割の総数 $p(n)$ を計算するための非常に高速なアルゴリズムを与えるという点で極めて役に立つ恒等式である．すなわち，(5.7) により，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^m)}$$

である．したがって，

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1$$

となるが，(5.13) より，

$$\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}(1+q^j)\right)\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1 \tag{5.14}$$

と書き換えられる．$n > 0$ に対して (5.14) の両辺の q^n の係数を比較すると，

$$\begin{aligned} &p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) \\ &\quad - \cdots + (-1)^j p\left(n - \frac{j(3j-1)}{2}\right) + (-1)^j p\left(n - \frac{j(3j+1)}{2}\right) \\ &\quad + \cdots = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

という関係式が得られた．

コンピュータプログラミングが得意な人なら，(5.15) が $p(n)$ を計算するための効率のよいアルゴリズムを与えていることが分かるだろう．実際，$p(n)$ は $n^{\frac{3}{2}}$ に比例する時間で計算できる．例えば，

$$\begin{aligned} p(0) &= 1 \\ p(1) &= p(0) = 1 \\ p(2) &= p(1) + p(0) = 2 \\ p(3) &= p(2) + p(1) = 3 \\ p(4) &= p(3) + p(2) = 5 \\ p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) = 7 \\ p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) = 11 \\ p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 15 \\ &\cdots \end{aligned}$$

5.5　$p(n)$ の満たす合同式

ハーディとラマヌジャンが $p(n)$ の研究 (それが次章の主題である) を行っていたとき，彼らの研究結果をチェックするために $p(n)$ の値の表が必要であることに気づいた．それは，P. A. マクマホン によって与えられた．彼は，$1 \leq n \leq 200$ に対する $p(n)$ の表を作成していたのである．その表を読みやすくするために，彼は次のように 5 つずつのブロックにまとめた．

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	10	42	20	627
1	1	11	56	21	792
2	2	12	77	22	1002
3	3	13	101	23	1255
4	5	14	135	24	1575
5	7	15	176	25	1958
6	11	16	231	26	2436
7	15	17	297	27	3010
8	22	18	385	28	3718
9	30	19	490	29	4565

“数を愛した人” ラマヌジャンは，他の人なら見落としかねないことに気が付いた．すなわち，5 つずつのブロックの最後の行の $p(n)$ は 5 の倍数だということである．そこで彼は

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$

だと予想した．このまったく予期しなかった可能性を前にして，彼は他の等差数列についても調べてみた．すぐに彼は上の予想に次を付け加えた．

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$$

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$$

彼はこれらの予想をついには証明することができたが，さらに進んで $5^\alpha 7^\beta 11^\gamma$ の形の任意の整数を法として同様のことを予想した．多くの数学者がこの問題を研究し，最終的には G. N. ワトソンと A. O. L. アトキンによって解決された．アトキンの仕事は 1969 年に完成した．

演習問題

80. $n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2}$ の場合を除くと，

$$p(n \mid \text{すべての和因子は奇数}) \equiv 0 \pmod 2$$

であることを証明せよ．(難易度：2)

5.6 ロジャース–ラマヌジャン再訪

第 4 章でロジャース–ラマヌジャン恒等式を紹介した．本章で行った考察からただちに，和因子が $\pm 1 \pmod 5$ に合同な分割の母関数は

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}$$

であり，和因子が $\pm 2 \pmod 5$ に合同な分割の母関数は

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}$$

であることが分かる．

しかし，和因子が 2-差的な (言い換えると，どの和因子の差も 2 以上であるような) 分割については，その母関数はどんなものだろうか．$r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ がそのような分割だとする．すなわち，

$$1 \le r_1 \le r_2 - 2,\ r_2 \le r_3 - 2, \cdots$$

を満たしているとする．このとき，$0 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_m$ を

$$r_1 = n_1 + 1$$
$$r_2 = n_2 + 3$$
$$r_3 = n_3 + 5$$
$$\vdots$$
$$r_m = n_m + 2m - 1$$

によって定めることができる．よって，m 個の 2-差的な和因子による分割に対し，$n - (1 + 3 + \cdots + (2m-1)) = n - m^2$ の m 個の非負和因子による分割 (高々 m 個の正和因子による分割と言っても同じ) が一意的に対応する．これより，m 個の 2-差的な和因子による分割の母関数は

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_m} q^{(1+n_1)+(3+n_2)+\cdots+(2m-1)+n_m} \\
&= q^{m^2} \sum_{0 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_m} q^{n_1+n_2+\cdots+n_m} \\
&= q^{m^2} \sum_{0 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_{m-1}} q^{n_1+\cdots+n_{m-1}} \frac{q^{n_{m-1}}}{1-q} \\
&= \frac{q^{m^2}}{1-q} \sum_{0 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_{m-2}} q^{n_1+\cdots+n_{m-2}} \frac{q^{2n_{m-2}}}{1-q^2} \\
&= \frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)} \sum_{0 \le n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_{m-3}} q^{n_1+\cdots+n_{m-3}} \frac{q^{3n_{m-3}}}{1-q^3} \\
&\ \vdots \\
&= \frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}, \quad |q| < 1 \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

で与えられる．(5.16) 式をすべての $m \ge 0$ に対して足しあげると，すべての 2-差的な和因子による分割の母関数として

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}$$

が得られる．以上により，第 4 章のロジャース–ラマヌジャン恒等式は

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{m=1}^{\infty}&\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})},\quad |q|<1
\end{aligned}
$$

を意味していることが分かった．

以上の議論において，和因子から 1 を除外した場合を考えると，$n_1, n_2, \cdots, n_m$ は

$$
\begin{aligned}
r_1 &= n_1+2\\
r_2 &= n_2+4\\
r_3 &= n_3+6\\
&\vdots\\
r_m &= n_m+2m
\end{aligned}
$$

によって定められる．このときには，$m^2+m=2+4+6+\cdots+2m$ だから，母関数は

$$
1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{m^2+m}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}
$$

となる．

したがって，ロジャース–ラマヌジャンの第 2 恒等式 (演習問題 50 参照) は

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{m=1}^{\infty}&\frac{q^{m^2+m}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})},\quad |q|<1
\end{aligned}
$$

を意味する．

ロジャース–ラマヌジャン恒等式の完全な証明は，第 8 章で与えられる．

第 6 章

分割関数についての諸公式

第 2 章で注意したように，分割関数についての公式が得られればただちに解けるような分割問題が存在する．この章では，ある種の分割関数の公式を見出す初等的な方法を紹介する．ここで触れるのはほんの氷山の一角ではあるが，読者はこのテーマがなぜそれほど込み入ったものになるかについて感覚がつかめるだろうと思う．

この章のポイント

- 母関数の考察により，$m = 1, 2, 3, 4$ に対し，m 以下の和因子による分割の個数 $p(n, m)$ の公式が与えられる．
- n が無限に大きくなるとき，$p(n)^{\frac{1}{n}}$ は 1 に収束する．

6.1 $p(n, 1)$, $p(n, 2)$ の公式

われわれの主要な関心は，どの和因子も m 以下であるような n の分割の個数 $p(n, m)$ にある．これまでの記号では，

$$p(n, m) = p(n \mid \text{和因子は } \{1, 2, \cdots, m\} \text{ に属す}) \tag{6.1}$$

と表せる．

ただちに分かるように，1 だけを使った n の分割はただ 1 通りである．したがって，

$$p(n,1)=1$$

である．

$p(n,2)$ の公式を求めるのも，それほど難しくはない．1 と 2 を用いた分割は，2 を使った個数で一通りに決定される．残りはすべて 1 を使うしかないからである．したがって，任意の ν $\left(0\le\nu\le\dfrac{n}{2}\right)$ に対して，2 を ν 個，1 を $n-2\nu$ 個使った分割がただ 1 つだけ存在する．言い換えれば，

$$p(n,2)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$$

である．ここで $\lfloor x\rfloor$ は x 以下で最大の整数を表す．

同じアイディアを $p(n,3)$ に対しても試してみることができる．しかし，その結果はこれで分かったという気のあまりしないものである．$p(n,2)$ と同じ議論で，

$$p(n,3)=\sum_{0\le\nu\le\frac{n}{3}}p(n-3\nu,2)=\sum_{0\le\nu\le\frac{n}{3}}\left(\left\lfloor\frac{n-3\nu}{2}\right\rfloor+1\right) \tag{6.2}$$

が得られることは，ただちに納得できるだろう．じつは $p(n,3)$ にはうまい公式がある (次の節を見よ)．苦労をいとわない人ならば，上の右辺の和から出発してその公式を証明することができるだろう．だが，第 5 章のアイディアを用いると，$p(n,m)$ の公式を求めるための強力な手段が手に入るのである．そのためには，有名な二項級数 (第 7 章で再度論じられる)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m}{m}q^n=(1-q)^{-m-1},\quad |q|<1 \tag{6.3}$$

を知っている必要がある．ここで，

$$\binom{n+m}{m}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}=\frac{(n+m)!}{n!m!}$$

である．$m=0$ ならば，これは無限等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1 \tag{6.4}$$

に他ならない．(6.4) を (項別) 微分すると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \tag{6.5}$$

で，書き直せば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} q^n = (1-q)^{-2}$$

となり，これは (6.3) の $m=1$ の場合である．

(6.5) をさらに微分する (すなわち，(6.4) の 2 階微分を取る) と，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

となり，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} q^n = (1-q)^{-3}$$

と書き直せる．これは，(6.3) の $m=2$ の場合である．

演習問題

81. (6.3) は (6.4) を m 階微分することで得られることを示せ．
(難易度：2)

6.2　$p(n,3)$ の公式

第 5 章で見たように，$p(n,m)$ は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,m)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} \tag{6.6}$$

を母関数とする．

(6.6) の右辺をどう使ったらよいだろうか．われわれは，それを扱いやすい形のベキ級数に展開できるよう代数的に変形したい．例えば，まず，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,3)q^n = \frac{1/6}{(1-q)^3} + \frac{1/4}{(1-q)^2} + \frac{17/72}{1-q} + \frac{1/8}{1+q} + \frac{(2+q)/9}{1+q+q^2}$$

と部分分数分解してみよう．面倒で嬉しくはないが，これら 5 つの項のマクローリン展開を書いてやってもよい．だが，部分分数分解をちょっと修正してやると，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p(n,3)q^n &= \frac{1/6}{(1-q)^3} + \frac{1/4}{(1-q)^2} + \frac{1/4}{1-q^2} + \frac{1/3}{1-q^3} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}q^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}q^{3n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12}q^n - \frac{1}{3}q^n + \frac{1}{4}q^{2n} + \frac{1}{3}q^{3n}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12} + \varepsilon(n)\right)q^n \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

ともっと容易に計算できる．ここで，$\varepsilon(n)$ は $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{4}$ のいずれかの値をとる．

よって，マクローリン展開の一意性より，

$$p(n,3) = \frac{(n+3)^2}{12} + \varepsilon(n)$$

と結論できる．だが，ここで $p(n,3)$ は明らかに整数であり，$|\varepsilon(n)| < \frac{1}{2}$ である．したがって，$\{x\}$ で x にもっとも近い整数を表すと，

$$p(n,3) = \left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\} \qquad (6.8)$$

であることが分かった．

この方法はケーリーとマクマホンにさかのぼるもので，A. ムナギのまもなく発表される学位論文で一般化されている．

(6.8) を (6.2) から導くことはできるが，かなり面倒である．また，(6.7) の計算は，あらかじめ式 (6.8) を知ることなしに進めることができた．答えは最後になってひょっこりと現れたのである．これが母関数の技法の強力さを示す場面の 1 つである．

演習問題

82. $p(n,2)=\dfrac{2n+3+(-1)^n}{4}$ であることを証明せよ．(難易度：2)

83. $p(n|\text{和因子は }\{1,3,5\}\text{ に属す})=\left\{\dfrac{(n+3)(n+6)}{30}\right\}=\left\{\dfrac{(n+4)(n+5)}{30}\right\}$

 であることを証明せよ．(難易度：3)

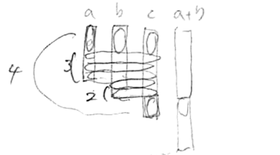
84. $p(n\,|\text{ 和因子は }\{2,3,4\}\text{ に属す})=\left\{\dfrac{(n-3)^2}{12}\right\}-\left\lfloor\dfrac{n-3}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{n-1}{4}\right\rfloor$

 であることを証明せよ．(難易度：3)

85. 3 辺の長さは整数で，その総和が n となるような互いに合同でない 3 角形の個数は

$$p(n-3|\text{ 和因子は }\{2,3,4\}\text{ に属す})$$

 で与えられることを証明せよ．(難易度：3)



6.3　$p(n,4)$ の公式

(6.8) の簡明さは，$m>3$ でも $p(n,m)$ についてすっきりした結果を期待させてしまうという点で，いささか誤解を招きかねない．どのような複雑さが現れてくるかを示すために，$p(n,4)$ を詳しく調べてみよう．

まず，次の等式

$$\sum_{n=0} a_n q^{2n}=\sum_{n=0} a_{\frac{n}{2}}\left((n+1)-2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)q^n \tag{6.9}$$

が必要となる．(6.9) のねらいは単純である．q の偶数ベキしか現れない左辺の級数をすべての非負整数ベキをわたる右辺の級数で置き換えたいのである．そうしてよいことは，

$$(n+1)-2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor=\begin{cases}0 & n\text{ が奇数のとき,}\\ 1 & n\text{ が偶数のとき,}\end{cases}$$

ということに気が付けば，ただちに分かる．

前節での $p(n,3)$ の取り扱い方を見本として，$p(n,4)$ の母関数の部分分数分解

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p(n,4)q^n &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}\\ &= \frac{1/24}{(1-q)^4}+\frac{1/8}{(1-q)^3}+\frac{59/288}{(1-q)^2}+\frac{17/72}{1-q}+\frac{1/32}{(1+q)^2}\\ &\quad +\frac{1/8}{1+q}+\frac{(1+q)/9}{1+q+q^2}+\frac{1/8}{1+q^2}\end{aligned} \tag{6.10}$$

から始めることもできる．

だが，(6.10) をそのまま扱うのは難しく，あまり魅力的でない．しかし，ちょっとした代数的操作をしてやると，(6.10) はずっと扱いやすい次の形に変形できる．

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p(n,4)q^n &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}\\ &= \frac{1/24}{(1-q)^4}+\frac{1/8}{(1-q)^3}+\frac{(5/12)^2}{(1-q)^2}+\frac{1/8}{(1-q^2)^2}\\ &\quad +\frac{1/16}{1-q^2}+\frac{(2+q)/9}{1-q^3}+\frac{1/4}{1-q^4}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{24}\binom{n+3}{3}+\frac{1}{8}\binom{n+2}{2}+\left(\frac{5}{12}\right)^2(n+1)\right)q^n\\ &\quad +\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{8}(n+1)+\frac{1}{16}\right)q^{2n}\\ &\quad +\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{9}q^{3n}+\frac{1}{9}q^{3n+1}+\frac{1}{4}q^{4n}\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{24}\binom{n+3}{3}+\frac{1}{8}\binom{n+2}{2}+\left(\frac{5}{12}\right)^2(n+1)\right)q^n\end{aligned}$$

$$+\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{1}{16}\right)\left((n+1)-2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)q^n$$
$$+\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{9}q^{3n}+\frac{1}{9}q^{3n+1}+\frac{1}{4}q^{4n}\right) \tag{6.11}$$

(6.11) 式の右辺の最後の和が表している無限級数の係数は，閉区間 $\left[0, \frac{17}{36}\right]$ に含まれていることに注意しよう．すなわち，これらの係数の絶対値は $\frac{1}{2}$ よりも確実に小さい．

したがって，$p(n,4)$ が整数であることは明らかであるから，(6.11) とマクローリン展開の一意性とから，

$$\begin{aligned}p(n,4) &= \left\{\frac{1}{24}\binom{n+3}{3}+\frac{1}{8}\binom{n+2}{2}+\frac{25}{144}(n+1)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{8}(n+3)\left(\frac{n+1}{2}-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right)\right\}\\&=\left\{\frac{(n+1)(n+4)(n+19)}{144}-\frac{(n+3)}{8}\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right\}\end{aligned}$$

が得られる．

演習問題

86. $p(n,4)=\left\{\frac{1}{36}\left\lfloor\frac{n+4}{2}\right\rfloor^2\left(3\left\lfloor\frac{n+9}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n+10}{2}\right\rfloor\right)\right\}$

    であることを証明せよ．(難易度：3)

87. $p(n,4)=\left\{\frac{1}{144}(n+5)\left(n^2+n+22+18\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right\}$

    であることを証明せよ．(難易度：3)

88. $p(n,5)=\left\{\frac{1}{2880}(n+8)\left(n^3+22n^2+44n+248+180\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right\}$

    であることを証明せよ．(難易度：3)

$p(n,m)$ の取り扱いがどんどん複雑になっていく様子を見てもらったところで，分割関数のより深い研究から得られたいっそう驚くべき公式でこの節を締めくくろう．

整数の分割の理論全体でもっとも有名な結果は，おそらく，ハーディ，ラマヌジャン，ラーデマッハーによって発見された $p(n)$ についての次の結果であろう．

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}\frac{\sinh\left(\pi\left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{24}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x-\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)_{x=n} + 類似の項の無限和 \tag{6.12}$$

(6.12) や関連する諸公式の証明は，一変数複素関数論の力を借りてなされる $p(n)$ の母関数についてのきわめて精妙な研究に基づいている．

前節までに述べた諸公式とそれに関連する歴史は，(Andrews, 2003) よりとられた．

6.4 $\lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} = 1$

この本では，(6.12) や類似の結果はまったく証明できないが，$p(n)$ についてもう少し語れることがある．すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{6.13}$$

が成り立つ．このことを $p(n)$ は準指数関数だと表現してもよい．

(6.13) の証明でさえ，多少はこみいっている．まず，

$$np(n) = \sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j) \tag{6.14}$$

を示そう．ここで，$\sigma(j)$ は j の約数の総和を表している．(6.14) を見るには，n のすべての分割を書き上げてそれらをみな足してしまえばよい．全部で $p(n)$ 個の n の分割があるのだから，総計は $np(n)$ である．一方，すべての分割を

通じて和因子 h は何回現れるのかを追跡してみよう．明らかに h は $p(n-h)$ 個の分割の中に少なくとも 1 回現れる．また，$p(n-2h)$ 個の分割の中に少なくとも 2 回現れ，$p(n-3h)$ 個の分割の中に少なくとも 3 回現れる．したがって，h が現れる回数は全体で

$$p(n-h)+p(n-2h)+p(n-3h)+\cdots$$

に等しい．よって，

$$\begin{aligned} np(n) &= \sum_{h=1}^{n} h(p(n-h)+p(n-2h)+p(n-3h)+\cdots) \\ &= \sum_{hk\le n} hp(n-hk) = \sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sum_{h|j} h = \sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j) \end{aligned}$$

となり，(6.14) が得られた．(ただし，上式の 2 行目で $h|j$ は h で j が割りきれることを意味する.)

任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し，ある (おそらく非常に大きい) 正定数 $C=C(\varepsilon)$ で

$$1\le p(n)\le C(1+\varepsilon)^n \tag{6.15}$$

が成り立つようなものが存在する，このことを示そう．

始めに無限級数

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j(j+1)}{2(1+\varepsilon)^j}$$

は収束することに注意する．これは，比判定法 (付録 A 参照) によってただちに分かる．そこで，

$$N\ge\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j(j+1)}{2(1+\varepsilon)^j}$$

を満たす $N=N(\varepsilon)$ を 1 つ選んでおく．さて，

$$C=\max_{1\le n\le N}\frac{p(n)}{(1+\varepsilon)^n} \tag{6.16}$$

とおこう．(6.16) によって定まるこの C に対して，(6.15) が成立することを n に関する帰納法で証明する．C の定義により，(6.15) が $n\le N$ に対して成

立することは明らかである．$n > N$ として，n 未満のすべての正整数に対して (6.15) が成り立っていると仮定しよう．このとき，(6.14) により，

$$
\begin{aligned}
p(n) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p(n-j)\sigma(j) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} C(1+\varepsilon)^{n-j}\sigma(j) \\
&= C(1+\varepsilon)^n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma(j)}{(1+\varepsilon)^j} \\
&\le C(1+\varepsilon)^n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(1+2+3+\cdots+j)}{(1+\varepsilon)^j} \\
&= C(1+\varepsilon)^n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2(1+\varepsilon)^j} \\
&\le C(1+\varepsilon)^n \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(j+1)}{2(1+\varepsilon)^j} \\
&\le C(1+\varepsilon)^n \quad (N \text{ の選び方より})
\end{aligned}
$$

となる．よって，数学的帰納法により，(6.15) は証明された．これを用いると，

$$
1 \le \liminf_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} C^{\frac{1}{n}}(1+\varepsilon) = 1+\varepsilon
$$

である．だが ε は任意の正数であったから，

$$
\limsup_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} = 1,
$$

したがって，望みどおりの

$$
\lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} = 1
$$

が得られた．

いま証明した $p(n)^{\frac{1}{n}}$ の 1 への収束の様子は，次の表にはっきり示されている．比較のために $F_n^{\frac{1}{n}}$ の黄金比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots$ への収束も並べておいた (念のため思い出しておくと，F_n はフィボナッチ数である)．

n	$p(n)^{\frac{1}{n}}$	$F_n^{\frac{1}{n}}$
5	1.475	1.380
10	1.453	1.493
100	1.210	1.605
250	1.141	1.613
1000	1.075	1.617

これが知るに値する結果である理由の 1 つは，(累乗根判定法により (付録 A 参照)) 無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$$

が $|q| < 1$ で絶対収束することが結論できるからである．

(6.13) の別の初等的な証明が (Andrews, 1971c) にある．

第 7 章

ガウス多項式

分割と母関数の知識を用いると，よく知られた二項係数とそれが満たすさまざまな関係式の有用な一般化，ガウス多項式 (別名，q–二項係数) とよばれる q の多項式，に導かれる．

この章のポイント

- 二項定理と二項級数定理は，二項係数 $\binom{n}{k}$ が，それぞれ，$(1+z)^n$，$(1-z)^{-n}$ の展開係数として現れることを主張している．
- ある数学的対象の q–類似とは，q の多項式であって q を 1 にしたときにもとの対象が現れるようなもののことである．二項係数の q-類似が q–二項係数であり，それは横 N，縦 m の長方形の内部に含まれるフェラーズ盤を数えることにより定義できる．
- q–二項係数はガウス多項式ともよばれる．ガウス多項式が満たすいくつかの関係式や極限を与える．それらは，後の章において利用されるであろう．

7.1　二項係数の性質

読者は二項係数についてはなじみがあるだろう．$\binom{n}{j}$ は，組合せ論的には n 個の元を含む集合から j 個の元を含む部分集合を選ぶ選び方の数である.[1]二項係数が次の簡単な明示式を持つことを示すのはやさしい．

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{j(j-1)(j-2)\cdots 1} \quad (n \geq j \geq 0)$$

二項係数は，よく三角形の形をした表

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

で示される．これは**パスカルの三角形**とよばれる．具体的な数で表すと，

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

---

[1] 高校の数学では ${}_nC_j$ という記号を使うが，$\binom{n}{j}$ という記号も一般的であり，こちらは n が非負整数でないときにまで拡張して使われる．

となる.[2)]先頭の行を第 0 行と数えることにすると，第 2 行，第 3 行には，それぞれ，$(1+z)^2 = 1+2z+z^2$, $(1+z)^3 = 1+3z+3z^2+z^3$ の係数が並んでいる．そして，第 n 行に並んでいる二項係数は $(1+z)^n$ の係数である．これが，有名な**二項定理**の主張するところである．

定理 7.1 (二項定理)

$$(1+z)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j.$$

負のベキに対しては，二項級数定理が成り立つ．これは，すでに第 6 章の計算で用いたことのある結果である．

定理 7.2 (二項級数定理)　$|z| < 1$ に対し

$$(1-z)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} z^j.$$

が成り立つ．

二項係数は多くの重要なよい性質を持っている．まず，対称性

$$\binom{n+j}{j} = \binom{n+j}{n}$$

が成り立つ．同じ行に並ぶ二項係数の和については

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

というきれいな式が成り立つ．交代和については，もっと簡単に

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$$

となる．最後に，初期値を $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ として，再帰的関係式 (漸化式)

[2)] 通常,「パスカルの三角形」(Blaise Pascal, 1623–1662) と言われるが，11 世紀頃の中国やイスラム圏ですでに知られていたようである．詳しいことは,『数学の歴史』(ヴィクター・J・カッツ著，上野健爾・三浦伸夫監訳，共立出版) を見よ．

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \quad (n > j > 0)$$

を満たす．以下の演習問題で，これらの性質を証明してみよう．

演習問題

89. 組合せ論的定義に基づいて等式 $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ を証明せよ．(難易度：2)

90. 二項係数の対称性を，代数的な方法と組合せ論的方法との 2 つのやり方で証明せよ．(難易度：2)

91. 再帰的関係式を用いて，パスカルの三角形の第 5 行目を計算せよ．(難易度：1)

92. 再帰的関係式を，代数的な方法と組合せ論的方法との 2 つのやり方で証明せよ．(難易度：2)

93. 二項定理を，組合せ論的方法と数学的帰納法の 2 つのやり方で証明せよ．(難易度：2)

94. 二項定理で $z=1$，また，$z=-1$ とおくことにより，上の 2 つの和公式を証明せよ．(難易度：1)

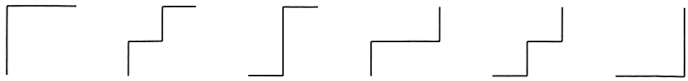
95. 二項級数定理を，数学的帰納法で証明せよ．(ヒント：$(1-z)^{-(n-1)} = (1-z)(1-z)^{-n}$．再帰的関係式を用いよ.) (難易度：2)

7.2　格子路と q–二項係数

次のような問題を考えているとしよう．

平面上の点 $(0,0)$ から点 $(2,2)$ まで至る道で，各ステップごとに上，または，右に 1 進むとすると，そのような道は何通りあるか．

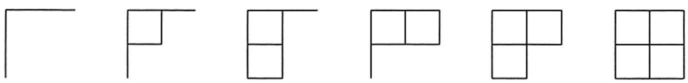
そのような道のことを**格子路**という．いまの場合，答えは



の 6 通りである．

答えがなぜ 6 となるかといえば，$6=\binom{2+2}{2}$ だからであり，それは全部で $2+2=4$ ステップのうちから 2 回右に進むステップを選べばよいからである．同じ理由で，点 $(0,0)$ から点 (N,m) に至る格子路の個数は $\binom{N+m}{m}$ に等しい．

さて，各格子路の左上側に正方形をのせることにより，この結果を改良してみよう．



これら $\binom{2+2}{2}$ 個の図を分割のフェラーズ盤とみなすと，これらは一辺の長さ 2 の正方形の内部に含まれるフェラーズ盤だということができる．そして対応する分割は，和因子が高々 2 個でどの和因子も 2 以下という条件を満たすものである．具体的には，

$$\varnothing \qquad 1 \qquad 1+1 \qquad 2 \qquad 2+1 \qquad 2+2$$

である．二項係数の組合せ論的定義の類似として，q–二項係数 $\left[\begin{array}{c}2+2\\2\end{array}\right]$ をこれら $\binom{2+2}{2}$ 個の分割の (変数を q とする) 母関数だと定義する．

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{c}2+2\\2\end{array}\right] &= q^0+q^1+q^{1+1}+q^2+q^{2+1}+q^{2+2}\\ &= q^0+q^1+2q^2+q^3+q^4.\end{aligned}$$

一般に，q–二項係数は

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{和因子は高々 } m \text{ 個でどの和因子も } N \text{ 以下})\, q^n$$

と定義される．これは，二項係数の自然な一般化で，しかも，$q=1$ とすると $\binom{N+m}{m}$ が回復されるという意味で，二項係数の q–**類似**である．二項係数の多くの性質がこの q–類似に拡張される．例えば，対称性

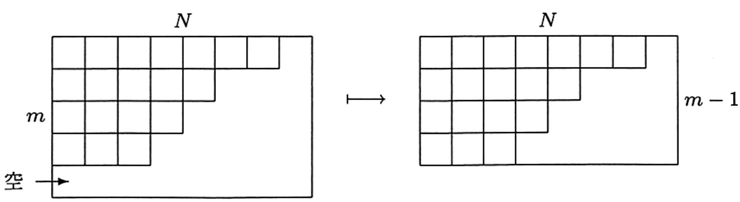
$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m \\ N \end{bmatrix}$$

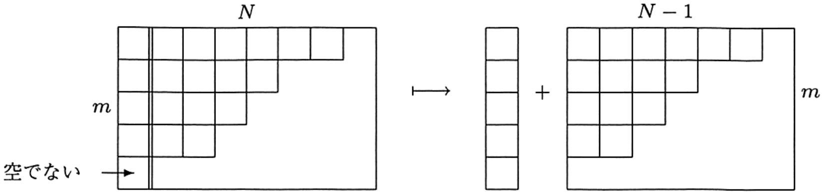
は，フェラーズ盤の共役を考えることでただちにしたがう．

次に二項係数には再帰的関係式があった．それを

$$\binom{N+m}{m} = \binom{N+m-1}{m-1} + \binom{N+m-1}{N-1}$$

の形に書いておく．フェラーズ盤の言葉でいうと，この再帰的関係式は横 N，縦 m の長方形に含まれる盤の集合が互いに素な 2 つの部分集合に分解されることを意味している．一方の部分集合は横 N，縦 $m-1$ の長方形に含まれてしまう盤のなす部分集合であり，他方はそうではない盤のなす部分集合である．後者の場合には，フェラーズ盤の第 1 列は長さ m であり，その列を取り除くと横 $N-1$，縦 m の長方形に含まれる盤が残る．





n の分割の言葉で述べると，この議論の結果は，

$$p(n\,|\,\text{和因子は高々 } m \text{ 個でどの和因子も } N \text{ 以下})\, q^n$$
$$= p(n\,|\,\text{和因子は高々 } m-1 \text{ 個でどの和因子も } N \text{ 以下})\, q^n$$
$$+ q^m p(n-m\,|\,\text{和因子は高々 } m \text{ 個でどの和因子も } N-1 \text{ 以下})\, q^{n-m}$$

と表すことができる．n についての和をとれば，q–類似の再帰的関係式

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} N+m-1 \\ N-1 \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

が証明された．同じ議論を共役な盤に適用すれば，再帰的関係式がもう 1 つ証明される：

$$\begin{bmatrix} N+m \\ m \end{bmatrix} = q^N \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N+m-1 \\ N-1 \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

二項係数については，明示式

$$\binom{N}{m} = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots 1}$$

があった．q–二項係数についての類似の明示式は

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)}$$

である．この式は，正整数 i の q–類似をとると多項式 $(1+q+\cdots+q^{i-1})=\dfrac{1-q^i}{1-q}$ になると考えると，もっとも簡単に記憶できるだろう．証明は演習問題とする．

演習問題

96. q–二項係数が初期値 $\begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N \end{bmatrix}$ を満たす理由を，組合せ論的に説明せよ．(難易度：1)

97. q–二項係数の明示式を数学的帰納法で証明せよ．帰納法の各ステップで再帰的関係式を用いよ．(難易度：2)

7.3 q–二項定理と q–二項級数定理

次の目的は，二項定理と二項級数定理の q–類似を発見することである．q–二項係数はある種の分割の母関数であったから，発見の種は，二項定理と二項級数定理の左辺である $(1+z)^n$ と $(1-z)^{-n}$ にうまく変数 q を挿入し，その展開係数が分割の個数を表すようにしてやることである．

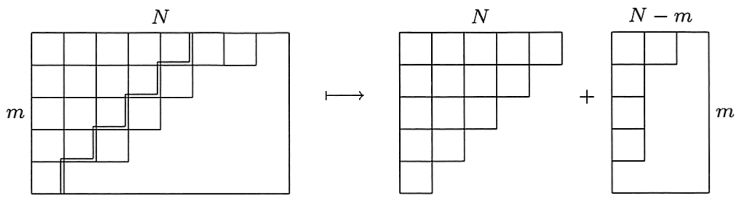
そのためにどうしたらよいかは，じつは第 5 章ですでに説明済みである．恒等式 (5.9) と (5.11) を特殊化すると，恒等式

$$\prod_{j=1}^{N}(1+zq^j) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p(n \mid \text{和因子は } m \text{ 個,すべて } \le N \text{ で相異なる}) z^m q^n, \tag{7.3}$$

および，

$$\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-zq^j} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p(n \mid \text{和因子は } m \text{ 個ですべて } \le N) z^m q^n \tag{7.4}$$

を得る．q–二項定理について，(7.3) の左辺をその候補とするのは妥当であろう．しかし，(7.3) に現れる分割は和因子が N 以下の m 個の正整数ですべて相異なるという条件を満たすものであるが，一方，$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix}$ によって数えられる分割は和因子が $N-m$ 以下の高々 m 個の正整数 (必ずしも相異なる必要はない) という条件を満たすものである．ところが，この 2 種類の分割の間には簡単な全単射が存在する．前者の分割が与えられたとき，その小さい方から i 番目の行から i を取り除けばよいのである．

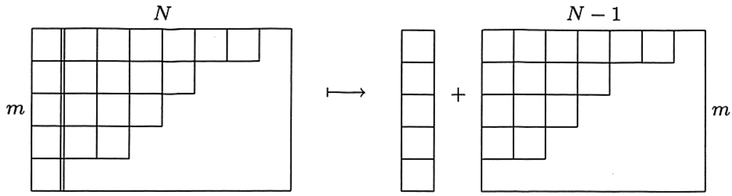


この全単射で $1+2+\cdots+m = \dfrac{m(m+1)}{2}$ 個の正方形が取り除かれていることに注意すれば，次の定理が得られる．

定理 7.3 (q–二項定理)

$$\prod_{j=1}^{N}(1+zq^j) = \sum_{m=0}^{N} q^{\frac{m(m+1)}{2}} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} z^m.$$

q–二項級数定理についても，同様の問題が生ずるが，こちらの方が簡単である．(7.4) の左辺をその候補と考えると，m 個の和因子を持つ分割を高々 m 個の和因子を持つ分割に変換しなければならないが，フェラーズ盤の第 1 列 (その長さは m である) を取り除くだけでよい．始めの分割が N 以下の和因子を m 個持っていたとすると，変換で得られる分割は $N-1$ 以下の和因子を高々 m 個持っていることになる．



この全単射によって，q–二項級数定理が証明される．

定理 7.4 (q–**二項級数定理**)　$|z| < 1$ かつ $|q| < 1$ のとき，

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{1}{1 - zq^j} = \sum_{m=0}^{\infty} q^m \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m \end{bmatrix} z^m$$

が成り立つ．

演習問題

98. q-二項定理で $z = 1, z = -1$ とすると，どのような恒等式が導かれるか．(難易度：1)

7.4　ガウス多項式が満たす恒等式

q–二項整数は**ガウス多項式**ともよばれた．それは，組合せ論的に定義される q の多項式で，公式

$$\begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)}$$

から明らかなように，その次数は $mN - \dfrac{m(m-1)}{2} - \dfrac{m(m+1)}{2} = mN - m^2 = m(N-m)$ である．

この多項式を定義した最初の人物はひょっとするとガウスではないかもしれないが，それはともかくとして，彼はいわゆるガウスの和の符号を決定するために，次の公式を証明した[3].

定理 7.5 (ガウスの公式)

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}), \\ (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{n-1}) & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$

n が奇数のときは，たいして難しくはない．実際，n が奇数だと，

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j} \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \quad (\text{対称性より}) \\ &= -\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.5}$$

となるが，自分自身の -1 倍と等しくなるような多項式は 0 しかないからである．したがって，ガウスの公式の最初の場合は正しいことが分かった．

さて，ガウスの公式の左辺を $f(n)$ とおく．このとき，q–二項係数の再帰的関係式 (7.1) により

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \right) \\ &= f(n-1) + (-1)^n \sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る．一方，第 2 の再帰的関係式 (7.2) からは

---

3) ガウス和の符号とガウスの公式との関係については，倉田令二朗『平方剰余の相互法則：ガウスの全証明』日本評論社，p.81 参照.

$$f(n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \right)$$
$$= -f(n-1) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

を得る．$f(n)$ に対するこの 2 つの表示を加え合わせると，n が偶数のとき，

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \bigl(1-(1-q^j)\bigr) \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{j=0}^{n} (-1)^j (1-q^j) \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \quad (n \text{ が奇数の場合の結果より}) \\ &= -(1-q^{n-1}) \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \begin{bmatrix} n-2 \\ j-1 \end{bmatrix} \\ &= (1-q^{n-1}) f(n-2) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．よって，n が偶数なら，定理の主張どおり

$$\begin{aligned} f(n) &= (1-q^{n-1}) f(n-2) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3}) f(n-4) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3}) \cdots (1-q^3)(1-q) f(0) \\ &= (1-q^{n-1})(1-q^{n-3}) \cdots (1-q^3)(1-q) \end{aligned}$$

となった．これでガウスの公式は証明された．

二項係数の 2 乗の和の公式

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

も古くからよく知られている．この公式の証明そのものを説明するより，ここではその q–類似

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

を証明することにしよう．

実際のところ，この証明はガウスの公式よりもなおやさしい．すなわち，定理 7.3 より

$$\sum_{j=0}^{2n} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ j \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{2n} (1 + zq^j) = \prod_{j=1}^{n} (1 + zq^j) \prod_{j=1}^{n} (1 + (zq^n)q^j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} (zq^n)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

(q–二項定理を 2 度用いた)

となる．この両辺の z^n の係数を比較すると，

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} q^{nk + \frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{n(n+1)}{2} + k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2$$

が得られる．変形の最後のステップでは q–二項係数の対称性を用いている．両辺の $q^{\frac{n(n+1)}{2}}$ を約せば，(7.6) が証明された．次章で，この等式の重要性を見ることになるだろう．

演習問題

99. $$\sum_{j=0}^{n} q^{\frac{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = (1 + q^{\frac{1}{2}})(1 + q)(1 + q^{\frac{3}{2}}) \cdots (1 + q^{\frac{n}{2}})$$

を証明せよ．(難易度：3)

100. $$\sum_{j=0}^{n} q^{j} \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+m+1 \\ n \end{bmatrix}$$

を証明せよ．(難易度：2)

7.5　ガウス多項式の極限値

次章では，パラメータのいくつか (場合によってはすべて) が増大したとき，ガウス多項式はどのようになるかを知る必要に迫られる．

ガウス多項式の明示式を使えば，それを知るのは難しい問題ではない．まず，m を固定したとき，

$$\lim_{N\to\infty}\begin{bmatrix}N\\m\end{bmatrix}=\lim_{N\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{N}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{N-m}(1-q^j)}$$
$$=\frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}=\frac{1}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)} \tag{7.7}$$

である．次に，m_1, m_2 を固定し，$R>S$ が正整数だと，

$$\lim_{N\to\infty}\begin{bmatrix}RN+m_1\\SN+m_2\end{bmatrix}=\lim_{N\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{RN+m_1}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{SN+m_2}(1-q^j)\prod_{j=1}^{(R-S)N+m_1-m_2}(1-q^j)}$$
$$=\frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}=\frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)} \tag{7.8}$$

である．

第 8 章

ダーフィー正方形

前章の (7.6) でガウス多項式の恒等式

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

を証明した.

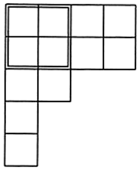
この恒等式は，**ダーフィー正方形**とよばれるものに基づく，分割の新しい分類によって理解することが可能である.

この章のポイント

- 分割のフェラーズ盤を，ダーフィー正方形とよばれる正方形でつながれた 2 つの小さなフェラーズ盤に分解することができる.
- ダーフィー正方形と関連して，フロベニウス記法とよばれる分割の表現法がある.
- フロベニウス記法の母関数により，有名で役に立つ定理，ヤコビの三重積公式，の簡単な証明を与えることができる.
- ガウス多項式とヤコビの三重積公式を用いて，ロジャース–ラマヌジャン恒等式を証明する.
- 分割のダーフィー正方形列への分解から，ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式の素敵な一般化が得られる.

8.1　ダーフィー正方形と母関数

分割のフェラーズ盤について復習しよう．例えば，$4+4+2+1+1$ のフェラーズ盤は



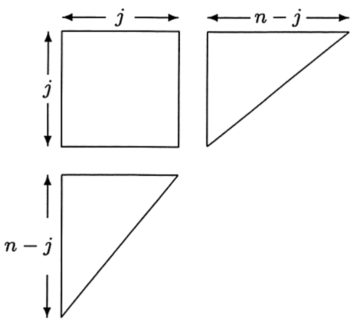
である．フェラーズ盤の内部に含まれ，左上の角に位置する正方形で最大のものに目をつける．これをその分割の**ダーフィー正方形**という．例えば，$4+4+2+1+1$ のダーフィー正方形は (上図のように) 一辺の長さが 2 である．

もっときちんとした定義がほしければ，与えられた分割は (大きいものから順に数えて) s 番目の和因子が $\geq s$ で $(s+1)$ 番目の和因子が $\leq s$ のとき，一辺の長さ s のダーフィー正方形を持つ，と言うこともできる．

この視点から (8.1) を捉えなおしてみよう．第 7 章で，q–二項係数

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

は，和因子が高々 n 個で，しかもすべて n 以下であるような分割の母関数であることを知った．これらの分割のうちで，そのダーフィー正方形の一辺の長



さが j であるようなものの母関数はどうなるだろうか．そのような分割のフェラーズ盤は，一般に，次のような形をしていることを考えると，その答えはすぐに得られる．

一辺の長さ j の正方形で表される分割の母関数は，単項式

$$q^{j\times j} = q^{j^2}$$

である．

第 7 章の q–二項係数の定義より，右上に位置するフェラーズ盤の母関数は

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$$

であり，左下に位置するフェラーズ盤の母関数は

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}$$

である．したがって，和因子は高々 n 個で，すべて n 以下であり，さらに一辺の長さ j のダーフィー正方形をもつような分割の母関数は

$$q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2$$

である．一方，$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$ によって数え上げられる分割は，一辺の長さが $0 \leq j \leq n$ のダーフィー正方形をただ 1 つ持っている．したがって，

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

となる．これは，(8.1) に他ならない．

ここで，$n \to \infty$ とすると，ヤコビによって初めて発見された等式

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^j)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \tag{8.2}$$

が即座に導ける．

演習問題

101. 和因子が N 以下の分割をダーフィー正方形の一辺の長さと和因子の個数に着目して調べ，恒等式

$$\sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} \frac{z^j q^{j^2}}{(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^j)} = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-zq^n}$$

を示せ．(難易度：2)

102. 和因子が N 以下で自己共役な分割の母関数は

$$\sum_{j=0}^{N} q^{j^2} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2}$$

であることを示せ．ここで，$\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2}$ は，ガウス多項式 $\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}$ において q を q^2 で置き換えたものを意味する．(難易度：2)

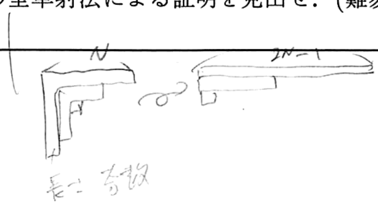
103. 第 7 章のガウス多項式の公式より，

$$\sum_{j=0}^{N} q^{j^2} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_{q^2} = (1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2N-1})$$

を導け．(難易度：2)

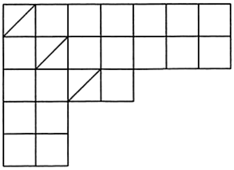
104. 和因子が $2N-1$ 以下の奇数ですべて相異なるような n の分割の個数と，和因子が N 以下で自己共役な n の分割の個数は等しいことを，演習問題 102，103 から導け．(難易度：2)

105. 演習問題 104 の主張の全単射法による証明を見出せ．(難易度：3)



8.2　フロベニウス記法

分割のフェラーズ盤を利用すると，分割のまったく新しい数値的表現法で，それからダーフィー正方形のサイズや共役分割がすぐに見て取れるようなものを作り出すことができる．この新しい表し方は，分割の**フロベニウス記法**とよばれ，$7+7+4+2+2$ を例とすると，次のようにして得られる．



この記法では，分割は，各行が順に減少する非負整数からなっている 2 行 s 列の行列で表される．ここで，s はダーフィー正方形のサイズである．上の行の j 番目の成分は，フェラーズ盤の第 j 行において，対角線 (上図では斜線で表した) の右側にある正方形の個数であり，下の行の j 番目の成分は，フェラーズ盤の第 j 列において，対角線の下側にある正方形の個数である．したがって，分割 $7+7+4+2+2$ のフロベニウス記法は

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

である．明らかにこれからもとの分割を再構成することができる．

フロベニウス記法で表された分割の母関数を作り出す単刀直入な方法がある．すなわち，

$$\begin{aligned} &\left\{(1+(zq)q^0)(1+(zq)q^1)(1+(zq)q^2)(1+(zq)q^3)\cdots\right\} \\ &\qquad \times\left\{(1+z^{-1}q^0)(1+z^{-1}q^1)(1+z^{-1}q^2)(1+z^{-1}q^3)\cdots\right\} \end{aligned} \tag{8.3}$$

における z^0 の係数を見るのである．この積を展開したときに z^0 が現れるのは，中括弧でくくられた 2 つの積において z を含む項と z^{-1} を含む項を同じ回数，例えば，s 回とって積を作った場合である．したがって，現れる積の一般的な形は，$a_1>a_2>\cdots>a_s\geq 0$, $b_1>b_2>\cdots>b_s\geq 0$ として，

$$q^s \cdot q^{a_1+a_2+\cdots+a_s} q^{b_1+b_2+\cdots+b_s}$$

となる．これは，フロベニウス記法

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \cdots a_s \\ b_1 b_2 \cdots b_s \end{pmatrix}$$

で表される $s + \sum a_i + \sum b_i$ の分割にちょうど対応する．フロベニウス記法と n の分割とは完全に対応しているから，(8.3) における z^0 の係数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \tag{8.4}$$

に等しい．

8.3　ヤコビの三重積公式

フロベニウス記法の母関数をこのような自然な眺め方をしておくと，ヤコビの有名な定理が容易に証明できるようになる．このアイディアはもっと一般的な状況に適用でき幅広い応用を持っている (Andrews, 1984).

定理 8.1 (ヤコビの三重積公式)　$|q| < 1$, $z \neq 0$ に対し，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}) \tag{8.5}$$

が成り立つ．

ヤコビの三重積公式の証明のために，

$$J(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})$$

と定義する．$J(z)$ を $z=0$ を中心としてローラン展開し，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(q) z^n \tag{8.6}$$

とおく．さらに，

$$\begin{aligned}
J(zq) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n+1})(1+z^{-1}q^{n-2}) \\
&= (1+z^{-1}q^{-1})\prod_{n=2}^{\infty}(1+zq^{n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{-1}q^{n-1}) \\
&= z^{-1}q^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{-1}q^{n-1}) \\
&= z^{-1}q^{-1}J(z)
\end{aligned}$$

が成り立つ．両辺の z^n の係数を比較すると，

$$q^n A_n(q) = q^{-1}A_{n+1}(q)$$

が分かる．この再帰的関係式を繰り返し用いると，任意の n に対し

$$A_n(q) = q^{\frac{n(n+1)}{2}}A_0(q) \tag{8.7}$$

となる．しかし，恒等式 (8.4) とその前の注意とから，

$$A_0(q) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n} \tag{8.8}$$

である．(8.8), (8.7), (8.6) を合わせると，

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}) = J(z) &= A_0(q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

が得られるが，明らかにこれはヤコビの三重積公式と同値である．

演習問題

106. ヤコビの三重積公式において q を q^3, z を $-q^{-1}$ で置き換えることにより，オイラーの 5 角数定理を導け．(難易度：1)

107. 恒等式 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)}{(1+q^n)}$ を証明せよ．(難易度：2)

108. 恒等式 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})}$ を証明せよ．(難易度：2)

109. ヤコビによる恒等式 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3$ を証明せよ．(難易度：3)

8.4　ロジャース–ラマヌジャン恒等式

ロジャース–ラマヌジャン恒等式には，本質的にやさしい証明は存在しない．しかし，ガウス多項式とヤコビの三重積公式についてこれまでに得られた知識に基づけば，デヴィッド・ブレスード (Bressoud, 1981) によるある多項式の間の関係式が証明でき，それを使ってロジャース–ラマヌジャン恒等式が導かれるのである．

(Chapman, 2002) に従って，段階をおって進もう．まず，次の 5 つの多項式の系列を考える．

$$s_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \tag{8.9}$$

$$t_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \tag{8.10}$$

$$\sigma_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n+2j \end{bmatrix}, \tag{8.11}$$

$$\sigma_n^*(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1+2j \end{bmatrix}, \tag{8.12}$$

$$\tau_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+2j \end{bmatrix}. \tag{8.13}$$

以下では，数学的帰納法により，

$$s_n(q) = \sigma_n(q) = \sigma_n^*(q), \tag{8.14}$$

および，

$$t_n(q) = \tau_n(q)$$

であることを示そう．これが証明できさえすれば，

$$\begin{aligned}1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} &= \lim_{n\to\infty} s_n(q) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(q) \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}, \\ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} &= \lim_{n\to\infty} t_n(q) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(q) \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}\end{aligned}$$

となることを示すのは容易である．実際，第 7 章の (7.7) からただちに

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n(q) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}, \\ \lim_{n\to\infty} t_n(q) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \end{aligned} \tag{8.15}$$

がしたがう．われわれが扱っている多項式は，$n \to \infty$ の極限においてロジャース–ラマヌジャン恒等式の左辺に収束するのである．

さて，$s_n(q)$ と $t_n(q)$ に対する再帰的関係式を 2 つ導こう．まず，

$$\begin{aligned}s_n(q) &= \sum_{j\geq 0} q^{j^2} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \right) \\ &= s_{n-1}(q) + q^n \sum_{j\geq 0} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \\ &= s_{n-1}(q) + q^n t_{n-1}(q) \end{aligned} \tag{8.16}$$

が成り立ち，さらに，

$$\begin{aligned}t_n(q) - q^n s_n(q) &= \sum_{j\geq 0} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (1-q^{n-j}) \\ &= (1-q^n) \sum_{j\geq 0} q^{j^2+j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= (1-q^n)t_{n-1}(q) \tag{8.17}$$

も成り立つ．再帰的関係式 (8.16), (8.17) と初期値 $s_0(q)=t_0(q)=1$ とが，すべての n に対し $s_n(q)$, $t_n(q)$ を一意的に決定することを示すのは，数学的帰納法のまったくやさしい問題である．

$\sigma_n(q)$ と $\sigma_n^*(q)$ は一致する．なぜならば，

$$\begin{aligned}
\sigma_n^*(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\left(\begin{bmatrix}2n\\n+2j\end{bmatrix}+q^{n+1+2j}\begin{bmatrix}2n\\n+1+2j\end{bmatrix}\right)\\
&= \sigma_n(q)+q^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+5)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n+1+2j\end{bmatrix}\right.\\
&\quad \left.+\sum_{j=-\infty}^{-1}(-1)^j q^{\frac{j(5j+5)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n+1+2j\end{bmatrix}\right)\\
&= \sigma_n(q)+q^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+5)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n-1-2j\end{bmatrix}\right.\\
&\quad \left.+\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{-j-1} q^{\frac{(-j-1)(5(-j))}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n-1-2j\end{bmatrix}\right)\\
&= \sigma_n(q)
\end{aligned} \tag{8.18}$$

だからである．

したがって，$\sigma_n(q)$ を表すのに，(8.11) と (8.12) のいずれを用いてもよい．特に，

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(q)-\sigma_{n-1}(q)\\
&\quad= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n+2j\end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n-1\\n+2j\end{bmatrix}\\
&\quad= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n-1\\n+2j-1\end{bmatrix}q^{n-2j}\\
&\quad= q^n\tau_{n-1}(q)
\end{aligned} \tag{8.19}$$

である．最後に，

$$
\begin{aligned}
&\tau_n(q) - q^n\sigma_n(q)\\
&\quad = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\left(\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+1-2j \end{bmatrix} - q^{n+2j}\begin{bmatrix} 2n \\ n-2j \end{bmatrix}\right)\\
&\quad = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\begin{bmatrix} 2n \\ n+1-2j \end{bmatrix} \qquad ((7.2)\text{ より})\\
&\quad = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\left(\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2j \end{bmatrix} + q^{n+1-2j}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+1-2j \end{bmatrix}\right)\\
&\quad = \tau_{n-1}(q) + q^n \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{1-j} q^{\frac{(1-j)(5(1-j)-3)}{2}+1-2(1-j)}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1+2j \end{bmatrix}\\
&\quad = \tau_{n-1}(q) - q^n \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\,\frac{j(5j-3)}{2}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1+2j \end{bmatrix}\\
&\quad = (1-q^n)\tau_{n-1}(q) \qquad (8.20)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．すでに注意したように，再帰的関係式 (8.16), (8.17) と初期値 $s_0(q) = t_0(q) = 1$ とからすべての $s_n(q), t_n(q)$ は一意的に定まった．一方，いま (8.19), (8.20) で示したように，$\sigma_n(q), \tau_n(q)$ もまったく同じ関係式を満たしている．さらに，$\sigma_0(q) = \tau_0(q) = 1$ でもある．したがって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$
s_n(q) = \sigma_n(q),
$$
$$
t_n(q) = \tau_n(q)
$$

である．よって，(8.9) により，

$$
\begin{aligned}
&1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}\\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} s_n(q) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n(q)\\
&\qquad = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \qquad ((7.8)\text{ より})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-2})(1-q^{5m-3})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}$$

(定理 8.1 において q を q^5, z を $-q^2$ で置き換える)

$$= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m-4})(1-q^{5m-1})}$$

となり，ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式が証明された．また，(8.10) によれば，

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} t_n(q) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(q)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \qquad ((7.8)\ より)$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-1})(1-q^{5m-4})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}$$

(定理 8.1 において q を q^5, z を $-q^{-1}$ で置き換える)

$$= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m-3})(1-q^{5m-2})}$$

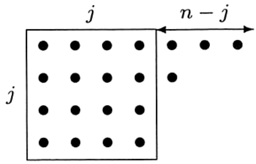
となり，ロジャース–ラマヌジャンの第 2 恒等式が証明された．

8.5　ダーフィー正方形列

この節では，ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式のちょっと素敵な一般化を与えよう．式 (8.9) で定義された多項式

$$s_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$$

をもう一度考えよう．すでに第 7 章で示したように，$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ は，和因子の個数が高々 j 個で，いずれも $n-j$ 以下の分割の母関数であった．$j^2 = j+j+j+\cdots+j$ であることに注意すると，$s_n(q)$ は，和因子は n 以下 j (= 和因子の個数) 以上であるような分割の母関数であることが容易に分かる．

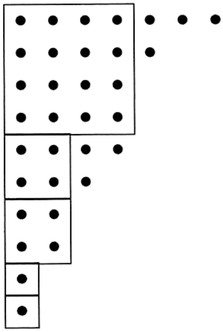


例えば，

$$s_4(q) = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^{2+2} + q^{3+2} + q^{4+2} + q^{3+3} \\ + q^{4+3} + q^{4+4} + q^{3+3+3} + q^{4+3+3} + q^{4+4+3} + q^{4+4+4} + q^{4+4+4+4}$$

である．

このような分割をダーフィー正方形に着目して調べてみると，これらの分割ではダーフィー正方形の下側に和因子が出てこないことに気付く．ここから出発して，ダーフィー正方形の概念を**ダーフィー正方形列**の概念に拡張することができる．アイディアは，ダーフィー正方形の下側に現れるフェラーズ盤のダーフィー正方形を考えることを繰り返して，ダーフィー正方形の系列を作り出す



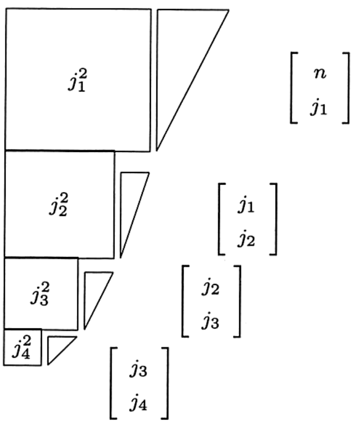
ことである．例えば，分割

$$7+5+4+4+4+3+2+2+1+1$$

は長さ 5 の，すなわち，5 個の正方形からなるダーフィー正方形列を持っている．ダーフィー正方形列の考えを思いつけば，長さが高々 k のダーフィー正方形列をもつような分割の母関数を決定するのはかなりやさしいことである．実際，われわれは $k=1$ のときの答えはすでに知っている．すなわち，すべての和因子が n 以下という条件の下で，

$$s_n(q)=\sum_{j=0}^{n} q^{j^2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$$

となる．一般の k に対しては，サイズが $j_1 \geq j_2 \geq j_3 \geq \cdots \geq j_k$ の k 個の正方形列が与えられたとき，それをどう補ったらフェラーズ盤が得られるかを考えればよい．次のようなフェラーズ盤の図式を考えるのが，もっとも分かりやすいだろう．



よって，長さが高々 k のダーフィー正方形列を持ち和因子がすべて n 以下の分割の母関数 $s_{k,n}(q)$ は，

$$
\begin{aligned}
s_{k,n}(q) & \\
&= \sum_{n \geq j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_k \geq 0} q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} j_{k-1} \\ j_k \end{bmatrix} \\
&= \sum_{n \geq j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_k \geq 0} \frac{q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2}(q;q)_n}{(q;q)_{n-j_1}(q;q)_{j_1-j_2}(q;q)_{j_2-j_3}\cdots(q;q)_{j_{k-1}-j_k}(q;q)_{j_k}}
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで，$(q;q)_m = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)$ という記号を用いた．さて，$n \to \infty$ とするならば，長さが高々 k のダーフィー正方形列を持つ分割の完全な母関数として，

$$
s_{k,\infty}(q) = \sum_{j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_k \geq 0} \frac{q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2}}{(q;q)_{j_1-j_2}(q;q)_{j_2-j_3}\cdots(q;q)_{j_{k-1}-j_k}(q;q)_{j_k}}
$$

が得られる．じつは，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_k \geq 0} & \frac{q^{j_1^2+j_2^2+\cdots+j_k^2}}{(q;q)_{j_1-j_2}(q;q)_{j_2-j_3}\cdots(q;q)_{j_{k-1}-j_k}(q;q)_{j_k}} \\
&= \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm(k+1) \pmod{2k+3}}}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \qquad (8.21)
\end{aligned}
$$

であることが証明できる (Andrews, 1979)．これから，長さが高々 k のダーフィー正方形列を持つ n の分割の個数は，和因子が $0, \pm(k+1) \pmod{2k+3}$ と合同にならないような n の分割の個数に等しいことが出てくる．

$k=1$ の場合がちょうど，ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式である．

第 9 章

オイラーの恒等式の精密化

第 1 章，第 2 章では，オイラーの簡潔でエレガントな恒等式

「相異なる和因子への整数 n の分割の個数は奇数和因子への n の分割の個数に等しい」

について詳しく調べた．

すでに見てきたように，この定理はその後の数多くの発展の先駆けであった．その中でももっとも有名なものがロジャース–ラマヌジャン恒等式である．ここでは，オイラーの定理 (2.1) をさらに深く掘り下げて調べ，2 つの組合せ論的変種を紹介する．そして，ごく最近得られた精密化についての考察を本章の締めくくりとしよう．

この章のポイント

- シルベスターは，一方では奇数和因子の個数を，他方では連続する和因子の列の個数を調べることにより，オイラーの定理を精密化した．
- ファインによるオイラーの定理の精密化では，最大の奇数和因子と，相異なる和因子への分割のダイソン階数が考察の対象となる．
- ブスケ-メルーとエリクソンによる精密化では，大きさを制限された奇数和因子と，相異なる和因子へのいわゆる「講義室分割」が考察される．

9.1 シルベスターによるオイラーの定理の精密化

19 世紀末に多才な数学者 J. J. シルベスターは，オイラーの定理が見たところよりもずっと多くのものを含んでいることを初めて発見した．これから考察する定理は,『三幕，幕間劇，およびエクソディオン[1]で編成された分割の構成的理論』と題されたシルベスターの巨大な論文 (Sylvester, 1884) で登場した．

定理 9.1 (シルベスターによる精密化)　ちょうど k 種類の奇数和因子 (何回使ってもよい) による n の分割の個数は，相異なる和因子への n の分割で独立した k 個の連続正整数列 (列は整数 1 個だけからなる場合もありうる) からなるものの個数に等しい．

例えば，$n=15$ で $k=3$ だとしよう．第 1 のクラスに属す分割は

$$\begin{gathered}11+3+1, 9+5+1, 9+3+1+1+1, 7+5+3,\\ 7+5+1+1+1, 7+3+1+1+1+1+1, 7+3+3+1+1,\\ 5+5+3+1+1, 5+3+3+3+1, 5+3+3+1+1+1+1,\\ 5+3+1+1+1+1+1+1+1\end{gathered}$$

の 11 個であり，第 2 のクラスに属す分割は

$$\begin{gathered}11+3+1, 10+4+1, 9+5+1, 9+4+2,\\ 8+6+1, 8+5+2, 8+4+(2+1), 7+5+3, 7+5+(2+1),\\ 7+(4+3)+1, (6+5)+3+1\end{gathered}$$

の同じく 11 個である．

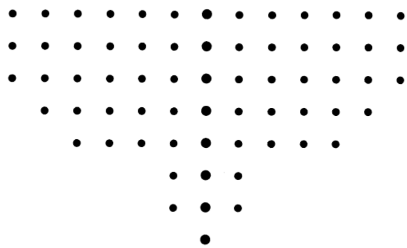
この結果を証明するために，奇数和因子への分割に対しフェラーズグラフの変種を導入しよう．和因子を表しているドット (ないしは四角) の列を左ぞろえするのではなく，

$$\overbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}^{m}\ \bullet\ \overbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}^{m}$$

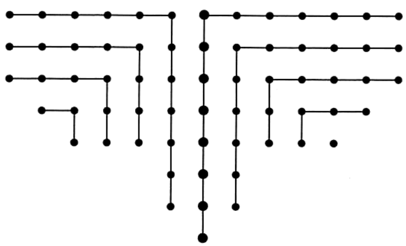
---

[1] Exodion. 演劇用語．ギリシア悲劇の終幕後の合唱隊の退場の際に歌われる歌．

と中心ぞろえするのである．奇数和因子への分割を中心ぞろえのグラフで表現できることは明らかであろう．例えば，$13+13+13+11+9+3+3+1$ は



で表すことができる．このような表現が与えられたとき，ドットを下図のような別のやり方で整列させることができる．



こうしてできる新しい分割は $14+12+11+8+7+6+4+3+1$ である．この新しい分割の和因子がすべて相異なっているのは，ちょっと驚きである．だが，もっと驚くべきことは，もとの分割がちょうど 5 種類の相異なる和因子を含んでいたのに対し，新しい分割は 5 つの連続する整数列 $14, 12+11, 8+7+6, 4+3, 1$ を含んでいることである．

しかし，ちょっと考えてみれば，この現象がいつでも起きていることを納得することができるだろう．もともとのグラフは中心線に関して対称である．中心線を含む折れ線から大きい順に並べると，右曲がり，左曲がり，右曲がり，左曲がり，$\cdots$ となり，左曲がり折れ線は直前の右曲がり折れ線と比べると，垂直部分上のドット数は同数かそれ以下であり，水平部分上のドット数は 1 個少ない．一方，右曲がり折れ線と直前の左曲がり折れ線を比べると，今度は垂直

部分上のドット数は 1 個少なく，水平部分上のドット数は同数かそれ以下である．さらに，直前のものよりもちょうど 1 だけ少なくなるのは，それが垂直部分は同じ行からスタートし，直前の折れ線が曲がった行と同数のドットを含む行で曲がるときに限られる．言い換えれば，同一の和因子から出発し同じ長さの行で終わるときに，連続する整数列が形づくられる．

上の例では，14 は 1 個のドットのみを含む行から出発し，長さ 13 の行で終わる折れ線から生ずる．第 2 の和因子 12 は 3 個のドットを含む行から始まる折れ線から生ずる．したがって，12 は新しい整数列の始まりとなる．第 3 の和因子は，同じ行から始まり長さ 13 の行で終わる折れ線から得られる 11 で，列の続きであって新しい列の始まりではない．同様に見ていくと，次の 8, 7, 6 は 9 個のドットを含む行から始まり，いずれも長さ 13 の行で終わっている．したがって，新しい連続整数列である．4, 3 は 9 個のドットを含む行から始まり，長さ 11 の行で終わる．最後に 1 は 9 個のドットを含む行から始まり，長さ 9 の行で終わる．逆写像は，一見したところではいささか手ごわそうであるが，かなりやさしく構成できる．

以上の分析により，オイラーの定理のシルベスターによる精密化は証明された．

演習問題

110. 最大和因子が k で和因子は互いに相異なる n の分割の個数は，n の奇数和因子への分割で $k = (\text{和因子の個数}) + \frac{1}{2}\left(\text{最大和因子} - 1\right)$ を満たすものの個数に等しいことを示せ．(難易度：2)

9.2 ファインによる精密化

1940 年代の初め，フリーマン・ダイソンは，最大和因子と和因子の個数との差を分割の**階数**と名づけた．定義より，$4+3+2+2+1+1$ の階数は $4-6=-2$ である．階数を導入したダイソンの動機は，$p(5n+4)$ はつねに 5 で割り切

れるというラマヌジャンの定理の組合せ論的説明を見つけたいというところにあった．ダイソンは，$5n+4$ の各分割に対して適当なパラメータが定まり，そのパラメータによって分割の全体が個数の等しい 5 つのクラスに分類されることを期待したのである．彼は，階数を法 5 で考えたもので分割を分類すれば，目的が達せられると予想した (予想はアトキンとスウィナートン-ダイヤーにより証明された)．

その数年後，ファインはこの概念を用いてオイラーの定理を精密化できることを見出した．

定理 9.2 (ファインによる精密化)　相異なる和因子への n の分割でその階数が $2r$，または，$2r+1$ であるものの個数は，奇数和因子への n の分割でその最大和因子が $2r+1$ であるものの個数に等しい．

11 の相異なる和因子への分割も奇数和因子への分割も 12 個あるが，それらは $r=5,4,\cdots,1,0$ に対応して次の 6 つの部分集合に分類される．

$$11$$
$$10+1$$
$$9+2, 8+3$$
$$8+2+1, 7+4, 7+3+1, 6+5$$
$$6+4+1, 6+3+2, 5+4+2$$
$$5+3+2+1$$

$$11$$
$$9+1+1$$
$$7+3+1, 7+1+1+1+1$$
$$5+5+1, 5+3+3, 5+3+1+1+1, 5+1+\cdots+1$$
$$3+3+3+1+1, 3+3+1+\cdots+1, 3+1+1+\cdots+1$$
$$1+1+\cdots+1$$

アンドリュース (Andrews, 1983) は，n の奇数和因子への分割でその最大和因子が $2r+1$ であるものと，n の相異なる和因子への分割でその階数が $2r$，または，$2r+1$ であるものとの間の全単射を与える，非常に簡単なアルゴリズ

ムを見出した．その写像は次のようなものである．

π を，階数が $2r$，または，$2r+1$ の相異なる和因子への分割とする．π の最大和因子を取り除き，もともとの階数が $2r$ ならば，残りの和因子のそれぞれに 1 を加える．もともとの階数が $2r+1$ のときには，残りの和因子のそれぞれに 1 を加え，さらに 1 を和因子として追加する．どちらの場合にも，分割されている数は $2r+1$ だけ小さくなっている．さらに，新しい分割の階数は $2r+1$ 以下である．

さて，この変換を分割が完全に空になるまで繰り返す．結果として，$2r+1$ 以下の奇数の非増加列が作られるが，それは n の分割を与えている．さらに，この写像は明らかに可逆であるが，これはこの写像が全単射でファインによる精密化の証明を与えていることを意味している．

この全単射の働き方を見るために，$n=11, r=2$ (したがって，$2r+1=5$) の場合を取り上げてみよう．各クラスには 4 個の分割が属しており，上の変換は次のようになる．(ただし，下図で，x は和因子に 1 を加えることを意味している．)

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet \\ \bullet \end{array} \underset{5}{\longrightarrow} \begin{array}{l} x\bullet\bullet \\ x\bullet \\ x \end{array} \underset{1}{\longrightarrow} \begin{array}{l} x\bullet\bullet \\ x\bullet \end{array} \underset{1}{\longrightarrow} \begin{array}{l} x\bullet\bullet \\ x \end{array}$$

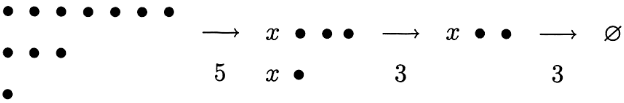
$$\underset{1}{\longrightarrow} \begin{array}{l} x\bullet \\ x \end{array} \underset{1}{\longrightarrow} x\bullet \underset{1}{\longrightarrow} x \underset{1}{\longrightarrow} \varnothing$$

よって，$8+2+1 \longmapsto 5+1+1+1+1+1+1$,

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet \end{array} \underset{5}{\longrightarrow} \begin{array}{l} x\bullet\bullet\bullet\bullet \\ x \end{array} \underset{3}{\longrightarrow} \begin{array}{l} x\bullet \\ x \end{array}$$

$$\underset{1}{\longrightarrow} x\bullet \underset{1}{\longrightarrow} x \underset{1}{\longrightarrow} \varnothing$$

よって，$7+4 \longmapsto 5+3+1+1+1$,



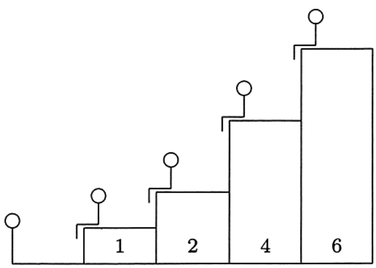
よって，$7+3+1 \longmapsto 5+3+3$,



よって，$6+5 \longmapsto 5+5+1$.

9.3　講義室分割

この節では，ごく最近になって登場したオイラーの恒等式の精密化を紹介する．1995 年にエリクソンは，**コクセター群**とよばれる代数的対象の組合せ論的表現を研究していた．この研究のまったく予期せぬ副産物として，彼は，後に**講義室分割定理**として知られるようになる分割恒等式に出くわした．この名称のもとは，大講義室の構造上の制約にある．講義室には座席が N 列並んでいるとしよう．どの座席からも，前方の座席にさえぎられることなく，講演者がはっきり見えなくてはいけない．



上図の講義室では，座席の高さのなす数列は講義室分割 $(1, 2, 4, 6)$ に対応している．(講義室 (lecture **hall**) という名前は有名な組合せ論研究者マーシャル・ホール (Marshall Hall) とフィリップ・ホール (Philip Hall) を思い起こさせる．多くの定理に 2 人の名前は残っている.) 数学的には，長さ N の講義室分

割の集合は

$$\mathcal{L}_N = \left\{ \lambda_1 + \cdots + \lambda_N \;\middle|\; 0 \leq \frac{\lambda_1}{1} \leq \frac{\lambda_2}{2} \leq \cdots \leq \frac{\lambda_N}{N} \right\}$$

と定義される．ただし，λ_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ のうちのいくつかが抜けていてもかまわない．抜けた部分は除外して考えると，小さい順に並べた整数の分割が得られている．例えば，

$$\frac{1}{1} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{6}{3}$$

だから，$1+3+6$ は長さ 3 の講義室分割である．抜けている部分があってもよいとしたので，$1+3+6$ は長さ 4 の講義室分割である可能性がある．

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{3} \leq \frac{6}{4}$$

だから，事実長さ 4 の講義室分割である．一方，$1+4+5$ は，

$$\frac{4}{2} \not\leq \frac{5}{3}$$

なので，長さ 3 の講義室分割ではない．10 の講義室分割で長さ 3 のものは，10, $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$, $1+2+7$, $1+3+6$ で尽くされる．10 の講義室分割で長さ 4 のものは，このリストに $1+2+3+4$ と $2+3+5$ が付け加わるだけである．

演習問題

111. $n = 12$ の講義室分割で長さ $N = 1, 2, 3, 4$ のものをすべて書き上げよ．
(難易度：1)

112. $\mathcal{L}_N$ はつねに $\mathcal{L}_{N+1}$ の部分集合である．その理由を説明せよ．
(難易度：2)

113. 講義室分割の和因子はすべて相異なることを証明せよ．(難易度：1)

講義室分割の恒等式はブスケ-メルーとエリクソンにより証明された (Bousquet-Mélou and Eriksson, 1997a, 1997b, 1999). それは次のようなものである.

定理 9.3 (講義室分割定理) n の講義室分割で長さ N のものの個数と, $2N$ 未満の奇数和因子への n の分割の個数とは等しい. 言い換えれば,

$$p(n \mid \text{長さ } N \text{ の講義室分割}) = p(n \mid \text{和因子はすべて奇数で} < 2N)$$

が成り立つ.

例えば, すでに見たように, 長さ $N = 3$ に対して $n = 10$ の講義室分割は 7 個である. そして, 期待通り, 10 の分割で和因子が $\{1, 3, 5\}$ のいずれかであるものはやはり 7 個, すなわち, $5+5$, $5+3+1+1$, $5+1+1+1+1+1$, $3+3+3+1$, $3+3+1+1+1+1$, $3+1+1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ である. 講義室分割定理は, 本質的にやさしい証明が存在しないという意味で, ロジャース–ラマヌジャン恒等式と同様に深い定理であると思われる.

演習問題

114. これまでに多くの分割恒等式を見てきた. これまでの分割恒等式と比べたとき, 講義室分割定理のもっとも興味深い特徴は何だろうか. あなたの意見を述べよ. (難易度：1)

115. $N = 1$ に対して講義室分割定理の全単射法による証明を与えよ. (難易度：1)

116. $N = 2$ に対して講義室分割定理の全単射法による証明を与えよ. (難易度：2)

117. $N = 3$ に対して講義室分割定理の全単射法による証明を試みてみよう. (難易度：3)

さて，この結果は，どのような意味でオイラーの恒等式の精密化といえるのだろうか．そもそもオイラーの定理は，相異なる和因子への n の分割の個数と奇数和因子への n の分割の個数が等しいというものであった．講義室分割定理は，この結果の「有限版」である．すなわち，$2N$ 未満の奇数和因子への分割と，互いに相異なる高々 N 個の和因子への分割で付加的な「講義室条件」を満たすものとが，同数存在するという主張である．

オイラーの恒等式は，講義室分割定理において N が無限に大きくなった極限の場合である．n を固定したとき，N が十分大きければ，$2N$ 未満の奇数和因子への分割は任意の奇数和因子への分割というのと同じである．一方，十分大きい N に対して，n の講義室分割は

$$\frac{\lambda_{N-k}}{N-k} \leq \frac{\lambda_{N-k+1}}{N-k+1}$$

の形の条件を満たさねばならないが，分子が分母に比べてずっと小さいのでこの不等式が成り立つには $\lambda_{N-k} < \lambda_{N-k+1}$ であれば十分である (そしてもちろん必要でもある)．言い換えれば，N が (n に比べて) 十分大きいとき，n の長さ N の講義室分割とは，単に相異なる和因子への分割というのと同じである．したがって，オイラーの恒等式は，N を無限に大きくしたときの講義室分割定理よりしたがう．

演習問題

118. λ で分割 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N$ を表し，和因子は小さい順に並んでいるとする．このとき，分割に対する新しい統計量 $s(\lambda)$ を交代和 $\lambda_N - \lambda_{N-1} + \lambda_{N-2} - \lambda_{N-3} + \cdots$ によって定義する．例えば，λ が分割 $1+3+6+6+7$ だとすると，$s(\lambda) = 7-6+6-3+1$ である．$s(\lambda)$ はつねに非負であり，λ が相異なる和因子への分割ならば正である．その理由を説明せよ．(難易度：1)

119. 講義室分割定理には，次のような精密化がある．正整数 N, S を固定する．このとき，長さ N で $s(\lambda) = S$ となる講義室分割 λ の個数は，$2N$ 未満の奇数和因子 S 個への分割の個数に等しい．$N = 5$, $S = 3$ とし，19 の

分割についてこの主張を，関係する 2 種類の分割をすべて書き上げることにより確かめよ．(難易度：1)

120. 前問の結果で，N を無限に大きくすると，オイラーの恒等式のどのような精密化が得られるであろうか．(難易度：1)

121. (Kim and Yee, 1999) この章の始めに説明したシルベスターの構成を適用することにより，演習問題 120 の主張を直接証明することを試みよ．(難易度：3)

講義室分割定理の証明に向けて，とりあえず最初の一歩を踏み出してみることにしよう．その過程で一般の N に対する定理の証明法も明らかになってくるだろう．分割 $2+5+11$ を考える．

$$\frac{2}{1} \leq \frac{5}{2} \leq \frac{11}{3}$$

だから，これは長さ 3 の講義室分割である．第 1 和因子から 1 を引き，第 2 和因子から 2 を，第 3 和因子から 3 を引いても，残った分割 $1+3+8$ はやはり講義室分割である．同じトリックをもう一回適用すると，$0+1+5$ となる．もはや，第 1 和因子から 1 を引くことはできないし，第 2 和因子から 2 を引くこともできない．しかし，第 3 和因子から 3 を引くことはでき，$0+1+2$ を得る．第 3 和因子から 3 を引くことは，もうこれ以上はできない．$0+1+2$ のような分割を**簡約 (された)** 講義室分割という．

一般に，講義室分割は，第 k 和因子から k を引いても依然講義室分割であるような k が存在しないとき，簡約されているといわれる．長さ 3 の簡約講義室分割は

$$0+0+0,\ 0+0+1,\ 0+0+2,\ 0+1+2,\ 0+1+3,\ 0+1+4$$

の 6 個ある．

長さ 3 の任意の非簡約講義室分割は，ブロック $1+2+3, 0+2+3, 0+0+3$ を各項ごとに和因子から差し引くことを繰り返して，簡約することがで

きる．逆に，簡約講義室分割から出発し，$1+2+3, 0+2+3, 0+0+3$ を加えることを繰り返すと，結果は講義室分割になっている．各ブロックを加える回数は一意的に定まる (なぜだろうか?)．簡約講義室分割の重み[2)]は，それぞれ，$0,1,2,3,4,5$ である．また，足し引きされるブロックの重みは $6,5,3$ である．よって，長さ 3 の講義室分割の母関数は

$$\frac{q^0+q^1+q^2+q^3+q^4+q^5}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^6)} = \frac{(1-q^6)/(1-q)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^6)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)}$$

と計算される．これは，講義室分割定理が主張している通り，6 未満の奇数和因子への分割の母関数である．

演習問題

122. 長さ 2 の簡約講義室分割を書き上げよ．2 個ある．(難易度：1)

123. 長さ 4 の簡約講義室分割を書き上げよ．24 個ある．(難易度：1)

124. 長さ N の簡約講義室分割は $N!$ 個ある．なぜか，その理由を説明せよ．(難易度：1)

125. 長さ N の講義室分割に，ブロック $1+2+\cdots+N, 0+2+3+\cdots+N, 0+0+3+4+\cdots+N, \cdots$ を各項ごとに加えた結果は，また，講義室分割になっている．なぜか，その理由を説明せよ．また，すべての講義室分割は，簡約講義室分割からこのやり方で構成される．なぜか，その理由を説明せよ．(難易度：2)

126. $N=2, N=4$ に対し，講義室分割定理を母関数を用いて証明せよ．(難易度：2)

127. 一般の N に対する講義室分割定理を簡約講義室分割を用いて証明しようとすると，次の段階としてどのような結果が必要になるだろうか，述べよ．(難易度：3)

---

2) 分割 $n=\lambda_1+\cdots+\lambda_N$ において，n のことを重みという．

128. 分割恒等式

$$p(n\,|\,\text{和因子は奇数で } < 2N)$$
$$= p(n\,|\,\text{和因子は } \leq 2N,\ N \text{ 以下の和因子は互いに相異なる})$$

を母関数法，全単射法の両方で証明せよ．例えば，$N=3, n=10$ に対しては，左辺の個数は 7 である．対応する右辺の 7 個の分割は，$6+4$, $6+3+1$, $5+5$, $5+4+1$, $5+3+2$, $4+4+2$, $4+3+2+1$ である．((Yee, 2002) 参照.) (難易度：3)

講義室分割定理を証明するための全単射の直接的な構成を発見することは難しいようである．演習問題 128 の右辺の分割と講義室分割との間のかなりこみいった全単射がブスケ-メルーとエリクソン (Bousquet-Mélou and Eriksson, 1999) によって発見されている．

μ を和因子は $2N$ 以下で，N 以下の和因子は互いに相異なるような分割とする．μ の和因子を小さい順に取り上げて，段階をおって長さ N の講義室分割が作られるようなアルゴリズムを説明しよう．作り出されるものは，分割というよりむしろ整数を成分とする $N \times N$ の三角形

$$\begin{array}{cccc} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1N} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2N} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{NN} \end{array}$$

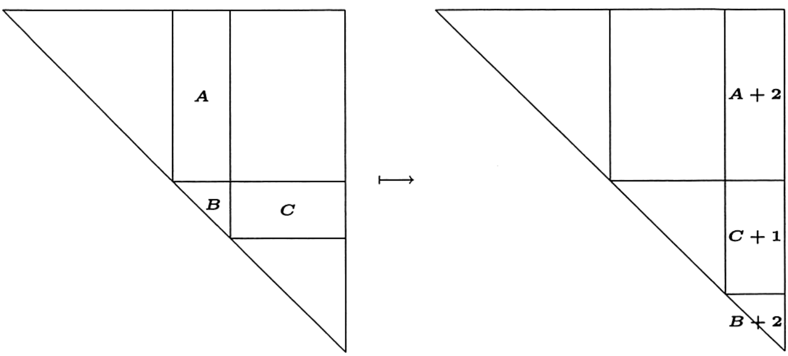
で，各列の和 $\lambda_i = t_{1i} + t_{2i} + \cdots + t_{ii}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ が講義室分割 λ を定めるのである．$\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_r$ と書き，和因子は小さい順に並んでいるものとする．

ステップ 0. μ の N 以下の和因子を，$\mu_1, \cdots, \mu_k$ としよう．$T^{(0)}$ を，$0, 1$ だけを成分とする $N \times N$ の三角形で，$i = 0, 1, \cdots, k-1$ に対し，第 $N-i$ 列の下から μ_{k-i} 個の成分が 1 でその他は 0 であるようなものだとする．

ステップ $s = 1, 2, \cdots, r-k$. 三角形 $T^{(s-1)}$ と μ_{k+s} より，新しい三角形 $T^{(s)}$ を次のようにして構成する．ある $i = 1, \cdots, N$ に対し $\mu_{k+s} = N + i$ と表せる．$T^{(s-1)}$ から第 i 行，第 i 列を除いて $(N-1) \times (N-1)$ のサイズの三角形を作る．そして，新しい第 N 列を

$$t_{jN}^{(s)} = \begin{cases} t_{j,i}^{(s-1)} + 2 & (j = 1, \cdots, i-1 \text{ のとき}) \\ t_{i,j+1}^{(s-1)} + 1 & (j = i, \cdots, N-1 \text{ のとき}) \\ t_{ii}^{(s-1)} + 2 & (j = N \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定める．このステップは，図式的には次のように表現できる．



$N = 4, \mu = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 6$ だとしよう．N 以下の和因子は $1, 2, 4$ である．したがって，ステップ 0 では，三角形

$$\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{matrix}$$

が得られる．μ の次の和因子は $\mu_4 = 5 = 4 + 1$ であるから，ステップ 1 では，太文字の行を取り除いて $(\mathbf{0} + 1, \mathbf{0} + 1, \mathbf{1} + 1, \mathbf{0} + 2) = (1, 1, 2, 2)$ を (縦にして) 第 4 列として付け加える．すると，三角形

$$\begin{array}{cccc} 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ & & 1 & 2 \\ & & & 2 \end{array}$$

が得られる．ステップ 2 では，$\mu_5 = 6 = 4 + 2$ を用いる．第 2 行，第 2 列を取り除き，$(\mathbf{1} + 2, \mathbf{1} + 1, \mathbf{1} + 1, \mathbf{1} + 2) = (3, 2, 2, 3)$ を第 4 列として付け加える．すると，三角形

$$\begin{array}{cccc} 1 & \mathbf{1} & 1 & 3 \\ & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ & & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{array}$$

が得られる．最後のステップ 3 では，$\mu_6 = 6 = 4 + 2$ を用いる．再び，第 2 行，第 2 列を取り除き，$(\mathbf{1} + 2, \mathbf{2} + 1, \mathbf{2} + 1, \mathbf{1} + 2) = (3, 3, 3, 3)$ を第 4 列として付け加える．すると，三角形

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 3 \\ & 2 & 2 & 3 \\ & & 3 & 3 \\ & & & 3 \end{array}$$

が得られる．この各列の成分を足し合わせて，長さ $N = 4$ の講義室分割 $\lambda = 1 + 3 + 8 + 12$ に到達した．以上の手続きは，本当に全単射を与えている．しかし，その証明はコクセター群を利用する必要があり，本書の程度を超えている．

全単射の別の構成法が (Yee, 2001) にあることをコメントしておく．

演習問題

129. $n = 10$, $N = 3$ のすべての分割に対して，上の全単射を適用してみよ．(難易度：1)

130. 全単射を $N=2$ の場合に特殊化してみるとどうなるだろうか. この場合には, うまくいっていることを証明せよ. (難易度：3)

第 10 章

平面的分割

これまで考えてきた分割は，$5+4+4+2$ のように，和因子を一直線に書くことのできるものだった．これを 1 **次元的分割**とよぶのは理にかなっているが，こうよんでみると高次元的分割というものもありうるのではないかという気がしてくる．この章では，2 次元的分割 (**平面的分割**と言ってもよい) について調べてみよう．

1 次元的分割では和因子を 1 行で書いてきたが，今度は，和因子が行列のような形で，行方向 (左から右へ)，列方向 (上から下へ) ともに非増加になるように配列されているものを考える．例えば，4 の平面的分割は

$$
\begin{array}{l}4,\end{array}\quad
\begin{array}{ll}3 & 1,\end{array}\quad
\begin{array}{l}3,\\ 1\end{array}\quad
\begin{array}{ll}2 & 2,\end{array}\quad
\begin{array}{l}2,\\ 2\end{array}\quad
\begin{array}{lll}2 & 1 & 1,\end{array}\quad
\begin{array}{ll}2 & 1,\\ 1 & \end{array}\quad
\begin{array}{l}2\\ 1\\ 1\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}1 & 1 & 1 & 1,\end{array}\quad
\begin{array}{lll}1 & 1 & 1,\\ 1 & & \end{array}\quad
\begin{array}{ll}1 & 1,\\ 1 & 1\end{array}\quad
\begin{array}{ll}1 & 1,\\ 1 & \\ 1 & \end{array}\quad
\begin{array}{l}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{array}
$$

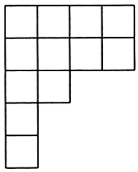
の 13 個である．

この章のポイント

- 平面的分割は 3 次元フェラーズ盤で表現でき，3 次元フェラーズ盤はまた 6 角形の菱形タイル貼りとみなすことができる．
- マクマホンは，平面的分割と行数制限付平面的分割の母関数についての美しい公式を発見した．

10.1 フェラーズグラフと菱形タイル貼り

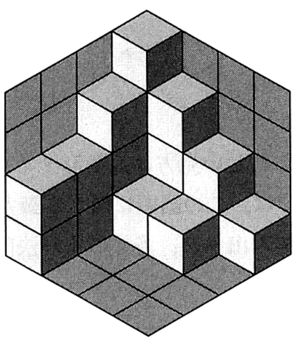
第 3 章で見たように，1 次元的分割はフェラーズ盤とよばれる図形的表現を持っていた．例えば，$4+4+2+1+1$ は



で表された．1 次元的分割が 2 次元的な幾何図形で表現されたのだから，平面的分割が 3 次元フェラーズ盤で表現されても驚くにはあたらない．今度は，四角形を和因子の数だけ横並べしていく代わりに，各和因子の場所に立方体を積み上げていくのである．平面的分割

$$
\begin{array}{llll}
4 & 3 & 2 & 1 \\
3 & 1 & 1 & \\
2 & & & \\
2 & & &
\end{array}
$$

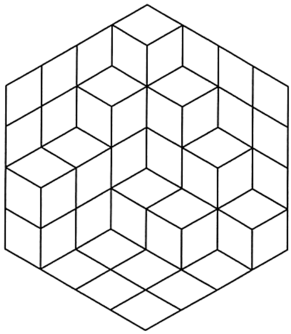
ならば，そのフェラーズ 3D-盤[1] は



[1] 3D = 3-dimensional(= 3 次元の) の略．3D グラフィックスという言葉はかなりポピュラーだが，そのときと同じ意味．

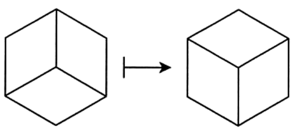
のように見えるだろう．

この表現法は，上に与えた数の配列が，一辺の長さ 4 の正 6 角形の一辺の長さ 1 の菱形 (内角が順に 60°, 120°, 60°, 120° の) によるタイル貼り (重ならないようにして覆い尽くすこと) を定めていることが観察される．すなわち，



実際，一辺の長さ n の正 6 角形のタイル貼りされた図で，それぞれの菱形をその向きに応じて色付けしてやれば，行、および、列の数が n 以下で，和因子もすべて n 以下の平面的分割のフェラーズ 3D-盤の図に見えてくる．

3D-盤に立方体を 1 つ追加することは，一辺の長さ 1 の単位正 6 角形のタイル貼りを回転させることに相当している．



平面的分割に対するこの新しい見方は，菱形タイル張りの理論という独立した分野に成長した．今日では，この話題に関する膨大な文献が発表されており，いくつもの新しい技巧が編み出され，多くの未解決問題が提出されている．

演習問題

131. 一辺の長さ 2 の正 6 角形の一辺の長さ 1 の菱形によるタイル貼りをすべて描いてみよ．20 個ある．(難易度：1)

132. 平面的分割と正 6 角形の一辺の長さ 1 の菱形による (この節で説明したような) タイル貼りとの間に，実際に全単射が存在することを証明せよ．ヒント：フェラーズ 3D-盤がそのようなタイル貼りを与えることは明らかである．そのようなタイル貼りで，平面分割のフェラーズ 3D-盤に対応しないようなものはありうるだろうか．(難易度：2)

10.2 マクマホンの公式

平面的分割はすばらしい簡潔さを備えた母関数を持っている．$pp(n)$ で n の平面的分割の個数を表す．マクマホンが証明したのは，次の美しい公式である．

定理 10.1 (マクマホンの平面的分割公式) 平面的分割の個数の母関数は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^n}, \quad |q| < 1$$

で与えられる．

P. A. マクマホン少佐[2)]は，数学の研究を 19 世紀数学の中心的話題の 1 つであった不変式論から始めた．不変式論において分割が果たす補助的な役割を通じて，かれは分割の理論に導かれた．彼は結合 (演習問題 30 参照) と多重分割 (整数の n 個の組の分割) のこみいった関係を解明しようと試みていたのだが，その研究から，フェラーズ盤を用いるシルベスターの仕事にならって，平面的分割へと入り込んでいくこととなった．マクマホンにとって驚きでもあり喜びでもあったことに，オイラーの美しい母関数定理 (5.7) と同等の美しさを備えた定理 10.1 の証明は，20 年間を費やす一大挑戦となったのである (MacMahon, 1897, 1916).

[2)] マクマホン (1854–1929) は軍人の家庭に生まれ軍人としての経歴を歩んだ．5 年間インドに派遣された後，王立軍事アカデミーや砲兵大学校で数学・物理の教授として活動した．この経歴から，数学者には珍しい「少佐」の肩書きが理解できるだろう．1890 年には王立協会のメンバーに選ばれ，ロンドン数学会の総裁も務めるなど，当時のイギリス数学界で重きをなした．

平面的分割のうち高々 k 個の行を持つものに制限してその個数 $pp_k(n)$ を数えると，マクマホンの平面的分割公式の精密化が得られる．このときの母関数は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp_k(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^{\min(k,n)}} \tag{10.1}$$

となる．この結果は，$k=1$ の特別な場合として，1 次元的分割についての結果を含んでいることを注意しておこう．

驚くべきことに，平面的分割に関するこれらの結果の証明は，その主張がこれほど簡潔であるにもかかわらず，第 5 章の 1 次元的分割に関する対応する定理の証明に比べて著しく難しい．実際，本書では，(10.1) を $k=2$ の場合に証明することだけで満足せざるを得ない．そのために，$\pi_r(h,j;q)$ で，行数は高々 2，どちらの行も和因子の個数は高々 r 個，上の行の第 1 和因子は h，下の行の第 1 和因子は j，という条件を満たす平面的分割の母関数を表す．

例えば，

$$\pi_3(2,2;q) = q^4 + q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 4q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + q^{11} + q^{12} \tag{10.2}$$

である．q^8 の係数 4 は平面的分割

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

の個数を数え上げたものである．

じつは，$\pi_r(h,j;q)$ は $r=1$ のときの自明な公式

$$\pi_1(h,j;q) = q^{h+j} \tag{10.3}$$

と再帰的関係式

$$\pi_r(h,j;q) = q^{h+j} \sum_{m=0}^{j} \sum_{n=m}^{h} \pi_{r-1}(n,m;q) \tag{10.4}$$

とから計算することができる．例えば，$r=1$ から $r=2$ へのステップは次のようになる．

$$\pi_2(h,j;q) = q^{h+j} \sum_{m=0}^{j} \sum_{n=m}^{h} q^{n+m}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{h+j}\sum_{m=0}^{j} q^m \cdot \frac{q^m - q^{h+1}}{1-q} \\
&= \frac{q^{h+j}}{(1-q)}\left(\frac{1-q^{2j+2}}{1-q^2} - \frac{q^{h+1}(1-q^{j+1})}{1-q}\right) \\
&= \frac{q^{h+j}(1-q^{j+1})}{(1-q)(1-q^2)}\left((1+q^{j+1}) - q^{h+1}(1+q)\right) \\
&= \frac{q^{h+j}(1-q^{j+1})}{(1-q)(1-q^2)}\left((1-q^{h+1})(1+q) - q(1-q^j)\right) \\
&= q^{h+j}\left(\begin{bmatrix} h+1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+1 \\ 1 \end{bmatrix} - q\begin{bmatrix} j+1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

演習問題

133. $$\pi_3(h,j;q) = q^{h+j}\left(\begin{bmatrix} h+2 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+2 \\ 2 \end{bmatrix} - q\begin{bmatrix} h+2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

となることを証明せよ．(難易度：2)

134. 前問の右辺をガウス多項式の再帰的関係式 (7.1), (7.2) を用いて変形することにより，$r=3$ に対する再帰的関係式 (10.4) が得られることを確めよ．(難易度：2)

10.3 $\pi_r(h,j;q)$ の公式

以上の準備の下で，L. カーリッツの方法 (Carlitz, 1967) に従い，

$$
\begin{aligned}
&\pi_r(h,j;q) \\
&\quad = q^{h+j}\left(\begin{bmatrix} h+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} - q\begin{bmatrix} h+r-1 \\ r-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+r-1 \\ r \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
\tag{10.5}
$$

を r に関する数学的帰納法で証明することができる．

$r=1, r=2$ の場合は，前節ですでに証明されている．帰納法の段階を進めるために，(第 7 章の演習問題 100 で与えられた) 公式

$$\sum_{j=0}^{N} q^j \begin{bmatrix} M+j \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+M+1 \\ M+1 \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

が必要である．

そこで，ある与えられた r 以下では，(10.5) が正しかったとしよう．このとき，帰納法は次のように進行する．

$$\begin{aligned}
&\pi_{r+1}(h,j;q) \\
&\quad = q^{h+j} \sum_{m=0}^{j} \sum_{n=m}^{h} \pi_r(n,m;q) \quad ((10.4) \text{ より}) \\
&\quad = q^{h+j} \sum_{m=0}^{j} \sum_{n=m}^{h} q^{n+m} \left(\begin{bmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \right. \\
&\qquad \left. - q \begin{bmatrix} n+r-1 \\ r-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r \end{bmatrix} \right) \\
&\quad = q^{h+j} \sum_{m=0}^{j} \left(\sum_{n=m}^{h} q^{n+m} \begin{bmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{n=m+1}^{h+1} q^{n+m} \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n+r-2 \\ r-2 \end{bmatrix} \right) \\
&\quad = q^{h+j} \left(\sum_{m=0}^{j} q^m \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} r+h \\ r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r+m-1 \\ r \end{bmatrix} \right) \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} r+h \\ r-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r+m-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \right) \right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ((10.6) \text{ より}) \\
&\quad = q^{h+j} \left(\begin{bmatrix} r+h \\ r \end{bmatrix} \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \right.
\end{aligned}$$

$$-\begin{bmatrix} r+h \\ r-1 \end{bmatrix} \sum_{m=0}^{j} q^m \begin{bmatrix} m+r-1 \\ r \end{bmatrix}\Bigg)$$

$$= q^{h+j}\left(\begin{bmatrix} r+h \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+r \\ r \end{bmatrix} - q\begin{bmatrix} r+h \\ r-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r+j \\ r+1 \end{bmatrix}\right)$$

((10.6) より).

これは，まさに $\pi_{r+1}(h,j;q)$ の求める公式である．よって，数学的帰納法により (10.5) は証明された．

系として，高々 2 行の平面的分割の個数 $pp_2(n)$ に対するマクマホンの公式がただちに得られる．実際，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} pp_2(n)q^n &= \lim_{\substack{r\to\infty \\ j\to\infty}} q^{-2j}\pi_r(j,j;q) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)^2} - q\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)^2} \\
&= (1-q)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)^2} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)^{\min(2,n)}}
\end{aligned}$$

となる．

演習問題

135. $\pi_2(j,j;q) = q^{2j}\begin{bmatrix} j+2 \\ j \end{bmatrix}$ を証明せよ．(難易度：2)

136. より一般に，

$$\pi_r(j,j;q) = q^{2j}\begin{bmatrix} j+r \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j+r \\ r-1 \end{bmatrix}\Big/\begin{bmatrix} j+r \\ 1 \end{bmatrix}$$

であることを証明せよ．(難易度：2)

第 11 章

フェラーズ盤を成長させる

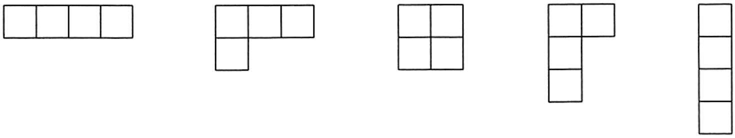
この 10 年ほどの間に，組合せ論的対象のランダム過程に対する関心が大きく高まった．この章では，ランダムドミノタイル貼りとランダムフェラーズ盤に関する最近の発展を取り扱う．

この章のポイント

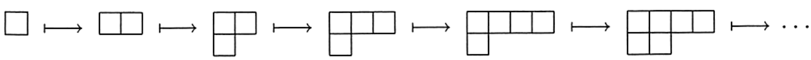
- すべての整数の分割の集合は，1 つの分割がもう 1 つの分割の後に来るとは後者のフェラーズ盤にいくつかの正方形を付け加えて前者のフェラーズ盤が得られるときだと定めることにより，半順序集合となる．
- 正方形を順次付け加えて分割を成長させるという動的な視点に立って，1 つのフェラーズ盤に正方形が付け加えられていく過程を追跡することにより，標準盤とよばれる対象が得られる．
- 簡単な規則に基づいて分割をランダムに成長させると，フェラーズ盤の縁が四分円に近づいていく．分割のこの成長過程は，アステカダイアモンドとよばれる図形のランダムドミノタイル貼りと深い関係がある．ジョカシュ，プロップ，ショアによる極円定理は，4 つの四分円が，どのようにして角における整然と並んだ（「凍結した」）タイルと中央部の内部カオス（「温帯」）との円形境界（「極円」）を形成するか，を記述する．

11.1 ランダム分割

例えば，n の分割のいずれもが等しい確率で選ばれるようなランダム分割を生成するにはどのようにしたらよいだろうか．小さな n，例えば，$n = 4$ ならば，簡単である．単にすべての分割をリストアップしてしまえばよい．



このとき，1 から $p(n)$ の間の (いまの例では，1 から 5 の間の) 整数をランダムにとり，対応する分割を選べばよい．しかし，n が大きいとき，例えば，$n = 1000$ のとき，あまりに多くの分割が存在するので，選択をする前にあらかじめリストアップしておくというのは合理的でない．では，1000 の分割から 1 つを一様の確率で選び出すには，どのようにしたらよいであろうか．ランダムフェラーズ盤を構成するのに，内向きの角をランダムに選んで正方形を付け加えていくというのは，気が利いた方法のように思われる．この過程がどのように進行するのか，例を見てみよう．



このランダムな成長過程では，すべての分割が等確率では生じないことが分かる．事実，ある種の分割はその他のものと比べて生ずる確率が極めて小さいのである．分割のランダム成長は一様にランダムな分割を生成することには失敗したのだが，それにもかかわらず，研究に値する対象である．じつは，もともとの問題よりも刺激的な数学が登場したのである！この章は，**極円定理**とよばれる，ドミノによるランダムタイル貼りに関する最近の目覚しい結果で締めくくられる．そこでは，フェラーズ盤の成長が基本的な役割を果たすだろう．

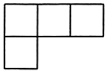
演習問題

137. 与えられた大きな数に対し一様にランダムな分割を生成する問題を取り扱う別の方法を考案せよ．(難易度：3)

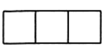
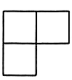
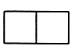
11.2　分割のポセット

全順序，半順序に関する短い考察から始めよう．非負整数の集合には，$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$ と，数の大きさで全順序が与えられている．どの数も他の任意の数と大小比較ができ，どちらか一方が他方よりも大きいということになる．平面上の整数点について，同じようなやり方で順序を定義することを試みよう．例えば，$(a,b) \preceq (m,n)$ となるのは，$a \leq m$ かつ $b \leq n$ のとき，すなわち，2 つの座標をそれぞれ比較し同じ大小関係が成り立っているとき，だと定めてみよう．この順序の下で，例えば，$(0,0) \preceq (1,0) \preceq (1,1) \preceq (1,2)$ である．しかし，$(1,0)$ と $(0,1)$ とを比べても，どちらが大きいともいえない．平面上の整数点の集合は，$\preceq$ によって**半順序**が定まっているといわれる．すべての 2 点が比較可能というわけではないからである．

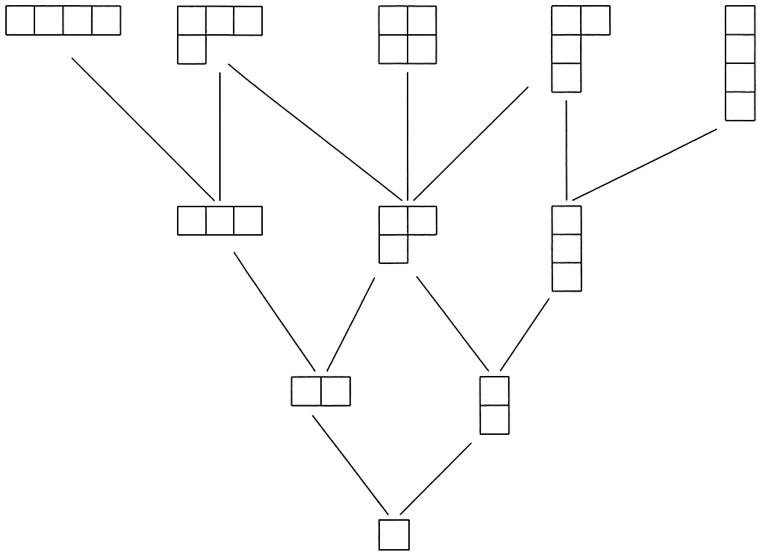
整数の分割にも，いくつかの有用な半順序が定まる．いわゆる**通常順序**について説明しよう．それはフェラーズ盤を利用して定義するのが，もっとも簡単である．1 つのフェラーズ盤がもう 1 つのフェラーズ盤よりも通常順序に関して先行する (または，小さい) というのは，前者が後者に含まれているときである (左上の角を一致させて考える)．例えば，フェラーズ盤



は

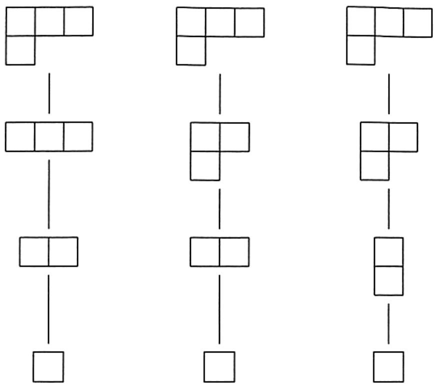
, , , ,  を含むが  は含まない．

半順序集合はしばしば**ポセット**[1]とよばれる．ポセットを図形的に表現するには，**ハッセ図** とよばれる便利な方法がある．ハッセ図は次の 2 つの単純な規則にしたがって描かれる．第 1 に，大きい元は紙の上で小さい元より上の方に描く．第 2 に，2 つの元が比較可能であり，かつ，両者の中間に位置する元がなければ，その間に線を引く．要するに無駄な線は引かないということである．2 つの元が比較可能なときには，小さいほうの元から大きいほうの元へ上っていく道が図上に存在することになる．次の図は，4 以下の正整数の分割が通常順序に関してなすポセットのハッセ図である．



整数の分割の通常順序に関するハッセ図では，盤 λ と μ との間に線が引かれるためには，λ の内向きの角に正方形を 1 個付け加えて μ が得られることが必要十分である (第 3 章参照)．したがって，最小の元からスタートして分割 λ に至る上向きの道は，正方形を 1 個ずつ付け加えて λ のフェラーズ盤を構成するやり方を完全に指定している．例えば，$3+1$ に至る 3 通りの道が存在する．

[1]partially ordered set (= 半順序集合の英語) の省略形である．



分割に対する通常順序を $\preceq$ で表そう．上図の一番右の道は $1 \preceq 1+1 \preceq 2+1 \preceq 3+1$ を意味している．$1+1+1$ は $3+1$ より小さくないので $1+1+1 \not\preceq 3+1$ である．

演習問題

138. 通常順序に関するハッセ図を 5 の分割まで延長せよ．(難易度：1)

139. 最小元からの道がただ一通りに限るような分割を特徴づけよ．(難易度：2)

140. λ', μ' を，それぞれ，λ, μ の共役とする．もし，$\lambda \preceq \mu$ ならば，$\lambda' \preceq \mu'$ が成り立つことを示せ．(難易度：2)

141. 整数の分割に全順序を定義することを試みよ．(ヒント：辞書で用いられる全順序がある.) そして，4 までの正整数のすべての分割に対し，ハッセ図を描け．(難易度：2)

142. 通常順序以外でよく使われる順序は，**支配的順序**である．それを $\trianglelefteq$ で表そう．いま，和因子は大きい順に並べられているとする．すなわち，$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$ において $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ となっているとする (ずっと後ろの方には和因子として 0 が続いていると考える)．このとき，支配的順序に関して $\lambda \trianglelefteq \mu$ となるのは，不等式

$$\lambda_1 \leq \mu_1,\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq \mu_1 + \mu_2,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \cdots$$

がすべて成り立つときであると定義する．支配的順序の下で，5 までの正整数の分割に対し，ハッセ図を描け．(難易度：1)

143. 通常順序について λ が μ に先行しているとき支配的順序に関してもそうである，という主張は正しいか．その逆は正しいか．(難易度：2)

144. 同じサイズの分割の支配的順序は共役によって逆転すること，すなわち，$\lambda \trianglelefteq \mu$ ならば $\mu' \trianglelefteq \lambda'$ であることを示せ．(難易度：2)

11.3 フック長公式

本章の目的は，正方形を 1 個ずつランダムに付け加えてフェラーズ盤を成長させたとき，典型的な盤の形状についてなにが言えるかを調べることである．したがって，成長の過程で，与えられた 1 つのフェラーズ盤に至る道筋が何通りあるかを知っておく必要がある．そのような道筋は，各正方形に対し，それが何番目に付け加えられたものかを示す数字を書き込むことで，表すことができる．前節末の例にあげた 3 本の道は，それぞれ，

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

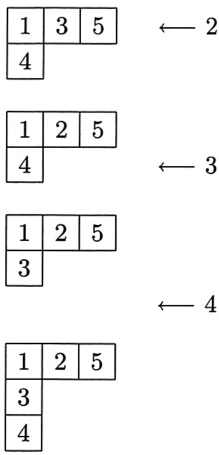
によって表される．

このようにして得られる対象は，フェラーズ盤の各正方形に，1 から盤に含まれる正方形の総数までの数字を，各行，各列ごとに単調増加になるように書き込んだものである．この数表のようなものは**標準盤** (またはヤング標準盤) といわれ，数学のさまざまな分野でひじょうに重要な研究対象となっている．分割の標準順序に関する前節のハッセ図において，一番下から n 番目のレベルまで達する道を数え上げることにより，$n = 1, 2, 3, 4$ に対し，n 個の正方形を含む標準盤の個数は，それぞれ，$1, 2, 4, 10$ であることが分かる．

演習問題

145. 5 個の正方形を含む標準盤の個数を求めよ．(難易度：1)

146. 標準盤 (ここでは記入されている数に飛びがあってもよいとする) に新しい数 N を挿入するのに，**行挿入**とよばれる操作を利用できる．行挿入は，次のようにして行う．N が最上行の右端の数よりも大きければ，最上行に N を記入した新しい正方形を付け加える．そうではないとき，最上行は N より大きい数を含むが，その中で最小の数を N' とし，N' を N で置き換え，N' を同様の方法で 2 行目に挿入する．この手続きを新しい正方形が付け加えられるまで続けるのである．例を見てみよう．



行挿入を行った結果は，つねに新しい標準盤 (記入された数に飛びがありうる) である．その理由を説明せよ．(難易度：2)

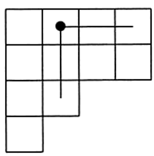
147. 角に位置する数から出発して行挿入操作を逆戻りさせることができる．どのようにしたらよいか．(難易度：2)

148. s_n で n 個の正方形を持つ標準盤の個数を表す．s_n は $s_1 = s_0 = 1$ を初期値とする再帰的関係式 $s_n = s_{n-1} + (n-1)s_{n-2}$ $(n \geq 2)$ を満たすことを示せ．ヒント：関係式の第 1 項は n がもっとも左の列の (一番下の)

正方形に記入されているような標準盤の個数と考える．第 2 項はそうでない標準盤の個数である．この場合には，n のすぐ左の列の一番下に記入されている数を考え，その数から出発して行挿入を逆行せよ．(難易度：3)

149. 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ をサイズ 1，または 2 の部分集合に分割する仕方の数は，同じ再帰的関係式を満たす．その理由を説明せよ．$n = 3$ の場合には，問題の集合の分割の仕方は $\{1\ 2,\ 3\}, \{1\ 3,\ 2\}, \{1,\ 2\ 3\}, \{1,\ 2,\ 3\}$ の 4 通りある．

与えられた型 λ の標準盤[2)]の個数を与える有名な公式がある．それは**フック長公式**とよばれている．そうよばれる理由はすぐに明らかになる．フェラーズ盤に含まれるどの正方形も，その正方形の右側にある正方形と下側にある正方形とからなるフック (カギ型図形) を定める．下図は，マークした正方形の定めるフックを示している．



フック長というのは，フックに含まれる正方形の個数である．それぞれの正方形にそれが定めるフック長を記入することで，1 つのフェラーズ盤から得られるすべてのフック長を記録することができる．例えば，

4	2	1
1		

7	5	3	2
6	4	2	1
3	1		
1			

2) 標準盤のもとになっているフェラーズ盤，また，そのフェラーズ盤が定める分割のことを標準盤の型という．

である．型 λ の標準盤の個数を f^λ で表す．すでに見たように，$f^{3+1}=3$ である．フレイム，ロビンソン，スロールのフック長公式は，

$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{ij\in\lambda} h_{ij}^\lambda} \tag{11.1}$$

となることを主張している．ここで，h_{ij}^λ は型 λ の i 行，j 列にある正方形で定まるフック長であり，積はそのフェラーズ盤に含まれているすべての正方形をわたる．$\lambda = 3+1$ に対しては，

$$f^{3+1} = \frac{4!}{4\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = \frac{24}{8} = 3$$

となり，すでに知っている値とたしかに一致する．

フック長公式の証明は色々知られているが，どれも本書の程度には合っていない．この公式を見出す発見的方法は，すべての正方形への番号付けの総数が $|\lambda|!$ であり，ある ij について i 行，j 列にある正方形に割り振られた数がフックの中の最小値でないような番号付けは (標準盤ではありえないので) 捨て去る，というものである．各正方形 ij に割り振られた数がフックの中で最小となる確率は $\frac{1}{h_{ij}^\lambda}$ だから，これらの確率がすべて独立だとしてよいのなら，フック長公式が成立する．この方針に基づく厳密な証明は (Sagan, 1991) [3]にある．

この注目すべき公式が与えられれば，興味ある特殊な場合の明示式は容易に得られる．例えば，階段 (演習問題 33 参照) に対するフック長は

---

[3]本書は絶版である．第 2 版 (Sagan, 2001) が Springer Verlag から出版されているがフック長公式の証明は別の方法に変わっている．

$2l-1$	$\ddots$	5	3	1
$\ddots$	5	3	1	
5	3	1		
3	1			
1				

である．このとき，フック長公式からただちに，この階段型の標準盤の個数は

$$f^{l+(l-1)+\cdots+1} = \frac{(l(l+1)/2)!}{1^l \cdot 3^{l-1} \cdot 5^{l-2} \cdots (2l-1)^1}$$

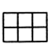
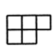
であることが分かる．

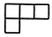
演習問題

150. 6 個の正方形からなるすべての型に対して，フック長公式を用いて標準盤の個数を計算せよ．(難易度：1)

151. 1 から 6 までのすべての n に対して，n 個の正方形からなる型のうちで，そこまで成長する仕方の数がもっとも多いのはどのような型か決定せよ．(難易度：1)

152. $n = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$ を計算し，一般式を予想せよ．($\lambda \vdash n$ は λ が n の分割であることを意味する．) (難易度：2)

153. 高々 2 つの行しか持たない型に対して，フック長公式を証明せよ．帰納法で示すことができる．2 つの場合を考察しなければならない．1 つは，型が の場合のように，ただ 1 個の外向きの角を持っている場合である．このときには，先行する型は，でなければならない．もう 1 つ

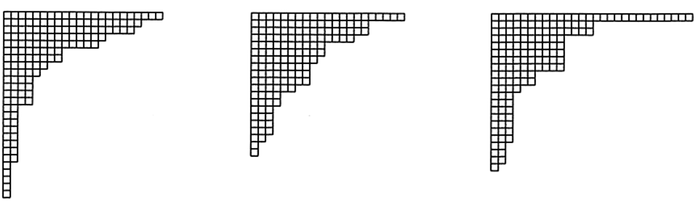
の場合は，のように，型は 2 つの外向きの角を持っている．このときには，先行する型には，と という 2 つの可能性がある．フック長公式が同じ再帰的関係を満たしていることを示せばよい．(難易度：2)

154. 等しい長さ m の 2 つの行からなる型をもつ標準盤の個数はカタラン数 C_m に等しいことを，フック長公式を用いて示せ．(第 3 章参照) (難易度：2)

155. 前問の標準盤と高さ m の階段の内部に含まれるフェラーズ盤との間の全単射を見出せ．(難易度：3)

11.4　フェラーズ盤のランダム成長

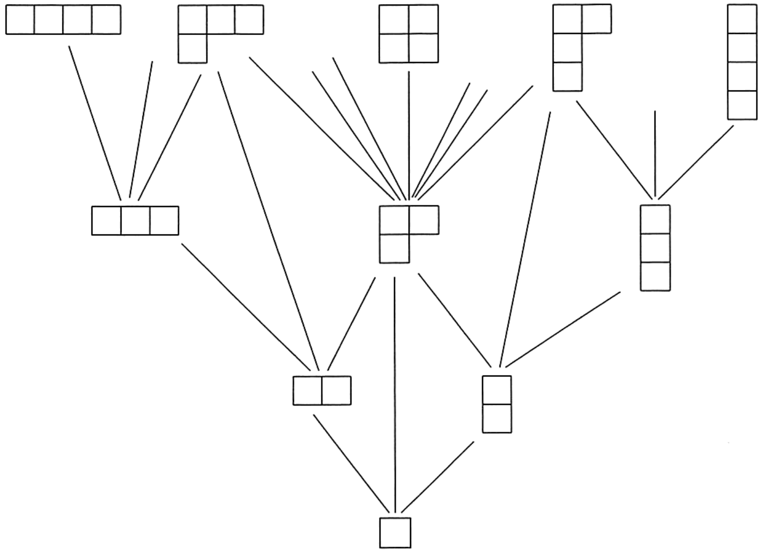
第 1 節で触れたランダムフェラーズ盤の構成手続きを実験してみよう．各ステップで，内向きの角をランダムに選んで新しい正方形を付け加えていくのである (このランダム成長過程を**タイプ I** ということにする)．正方形の数 n が大きくなるにつれ，ある特定の 1 つの形が現れる確率は 0 に近づく．だが，典型的な概形というものはあるのだろうか．次は，ランダム成長過程を $n = 150$ まで 3 回試行した結果である．



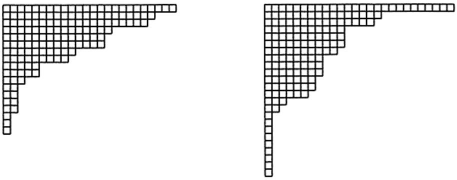
この 3 回の試行結果は細部はまったく異なっているが，その輪郭線には上に凸の傾向が出ている．実際，ロスト (Rost,1981) は n が大きくなるにつれ輪郭線は (この章の後半で正確に述べられるある確率論的な意味で) 放物線形になっ

ていくことを証明した.

成長過程にランダムな選択を導入する別の方法 (**タイプ II** ということにする) として，各段階ごとに，すべての内向きの角でコインをはじいて，裏が出た角だけを正方形で埋めるというやり方がある．このやり方をすると，一度に2個以上の正方形を追加する可能性が出てくるので，通常順序のハッセ図にいくつかの新しい道を付け加えたグラフの中の道をランダムに選ぶことになる.



このタイプ II のランダム成長過程を (少なくとも)150 個の正方形を付け加えるまで 3 回の試行を行うと，次の結果が得られた.



この試行の結果はタイプ I の過程から得られたものとあまり違わなく見えるが，タイプ II の方が少しばかり太っているようにも見える．ジョカシュ，プ

ロップ，ショアーは 1995 に，タイプ II の場合の輪郭線は四分円の形に近づいていくことを証明した．後にこの章で，**極円定理**として彼らの結果に出会うことになる．関連した研究が (Pittel, 1997) でもなされている．

演習問題

156. フェラーズ盤をランダムに成長させると (タイプ I の場合でも，タイプ II の場合でも)，輪郭線の典型的な形は下に凸ではなく上に凸になるのが理にかなっている．その理由の発見的な説明を見出せ．(難易度：2)

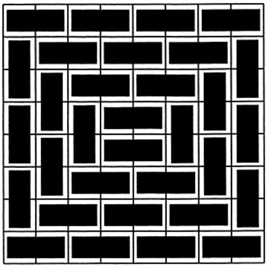
157. フェラーズ盤は 2 次元のものであるが，次のようにすると，その成長を 1 次元的にモデル化できる．まず，十分多くの 0 が並び，その後に十分の多くの 1 が並んでいる列から始める．各ステップでは，その列から 01 というパターンを選んで 10 に置き換える (これがロストが取り扱った設定である)．これとフェラーズ盤の成長との関係を説明せよ．(難易度：2)

158. フェラーズ盤のランダム成長のコンピュータプログラムを書け (これはやさしい)．そして，ランダム化の仕方をいろいろ変化させて遊んでみよう．例えば，タイプ II 過程で，コインの裏表の出方に偏りを持たせたら何か影響が出るだろうか．または，タイプ I 過程で，内向きの角が属す行が長いほど選ばれる確率が減るようにしたらどうなるだろうか．(難易度：3)

11.5 ドミノタイル貼り

前節のランダムフェラーズ盤から次節の極円定理へと進むためには，ドミノタイル貼りという中継ぎが必要である．ジグソーパズルを解くときには，パズルのピースを合わせて長方形の完全な絵になるようにはめ込んでいく．描かれている絵柄を無視すれば，ある領域，いまの場合は長方形，の**タイル貼り**という数学的概念に到達する．すなわち，タイル貼りとは，ある領域を (**タイル**とよばれる) ピースで重なり合わないようにしながら覆い尽くす，ということである．

特によく研究されているのが，ドミノ (1×2 の長方形) によるタイル貼りである．一辺の長さ 2 の正方形のドミノタイル貼りは，2 個のドミノを  と水平に置くか， と垂直に置くかのいずれかで，2 通りのやり方がある．チェス盤 (一辺の長さは 8) に対しては，12,988,816 通りのドミノタイル貼りが存在する．次は，チェス盤のドミノタイル貼りの一例である．



ドミノタイル貼りは統計物理学でも一役買っている (そこでは，2 原子分子がドミノであり，ダイマーとよばれている)．1960 年代の初頭，物理学者のカステレイン，フィッシャー，テンパレイは，縦横 2 辺の長さが任意の偶数，$2m \times 2n$ としよう，の長方形をしたチェス盤のドミノタイル貼りの個数は，

$$N(n,m) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{2n+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{2m+1} \right) \tag{11.2}$$

であることを見出した．この不思議な公式には，この数の興味深い性質が隠されている．例えば，盤が正方形 ($m = n$) という特別な場合には，ドミノタイル貼りの個数はつねに奇数の 2 乗を 2^n 倍したものである．これらの数の始めの 5 つ，$N(0,0)$ から $N(4,4)$ まで，は

$$1 = 2^0, \quad 2 = 2^1, \quad 36 = 2^2 3^2, \quad 6728 = 2^3 29^2, \quad 12988816 = 2^4 901^2$$

となっている．

演習問題

159. カステレイン，フィッシャー，テンパレイの公式を用いて，$N(2,2) = 36$ を確かめよ．(難易度：1)

160. 古くからあるパズル：8×8 の普通のチェス盤で，対角線上に位置する向かい合った 2 つの角を取り去ると，ドミノでタイル貼りすることはできない．なぜだろうか．(難易度：2)

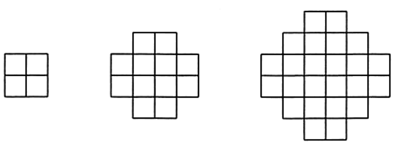
161. しかし，普通のチェス盤から白い正方形と黒い正方形を 1 個ずつ選んで取り除いたとき，残った部分はつねにドミノタイル貼りできることを示せ．(難易度：2)

162. 階段型フェラーズ盤は決してドミノタイル貼りできないことを証明せよ．(難易度：2)

163. 与えられたフェラーズ盤がドミノタイル貼りできるための必要十分条件を見出せ．(難易度：3)

11.6 極円定理

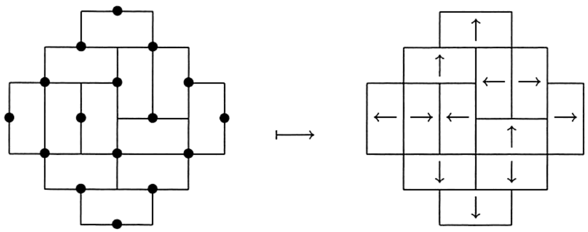
アステカダイヤモンドとは，同じ高さの階段形を 4 個，まっすぐな辺に沿って貼り合わせてできる図形である．サイズ 1,2,3 のアステカダイヤモンドは



となる．サイズ 1 のアステカダイヤモンドのドミノタイル貼りは  か， の 2 通りである．同様に，サイズ 2 のアステカダイヤモンドについても，すべてのドミノタイル貼りを構成するのはやさしく，全部で 8 通りある．一般に，サイズ m のアステカダイヤモンドのドミノタイル貼りは $2^{\frac{m(m+1)}{2}}$ 通りある．この公式は，1992 年に当時まだ若かった 4 人の数学者，ノアム・エルキース，グレッグ・クーパーバーグ，マイケル・ラーセン，ジム・プロップによって発見

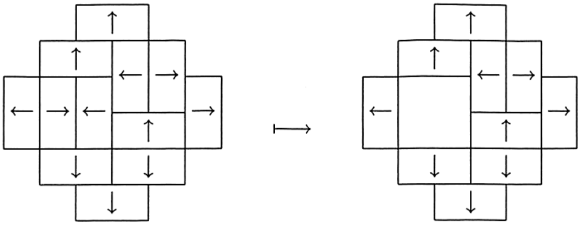
された．この公式は，一見したところより自然に見える正方形チェス盤の場合よりも (そのときは，2 ベキ倍の奇数の平方であった)，ずっと簡単である．

アステカダイヤモンドのドミノタイル貼りが与えられたとする．各ドミノに矢印をつけよう．まず，ダイヤモンドの最北端の辺の中点にドットでマークをつける．次に，最初のドットから，ドミノの辺に沿って下向き，ないしは横向きに偶数ステップ進むと到達できる点すべてにドットをつける．こうすると，各ドミノの長い辺のうち一方だけの中点にドットがついている．各ドミノに，ドットのついた長い辺に向かう矢印を書き込む．

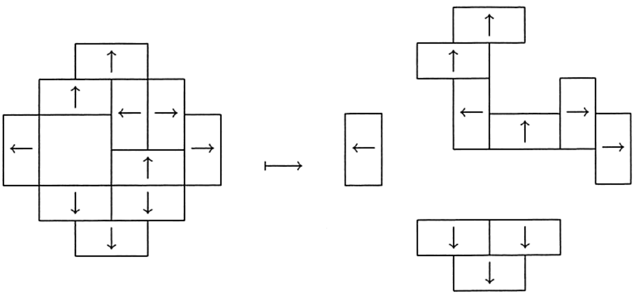


長さ 2 の辺を共有する 2 つのドミノの矢印はいつも反対向きになっていることに注意しよう．その矢印が互いに相手の方を指しているときには，この 2 つのドミノは**悪性ブロック**をなすといい，そうではないとき**良性ブロック**をなすという．この 2 種類のブロックの区別は，アステカダイヤモンドのランダムドミノタイル貼りを生成する確率論的過程において重要な役割を果たす．その過程は**反復シャッフリング**とよばれる．その各ステップでは，アステカダイヤモンドのドミノタイル貼りがサイズが 1 だけ大きいアステカダイヤモンドのドミノタイル貼りに拡張される．スタートは空のダイヤモンドである．

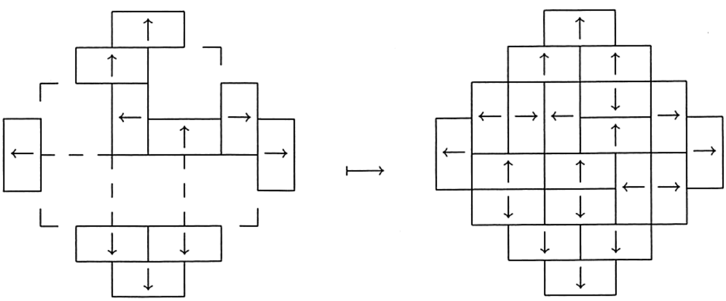
シャッフリング． 各ステップは，3 つの局面からなっている．まず始めに，すべての悪性ブロックを除去する．



2 番目に，すべてのドミノを矢印の方向に 1 ステップずらす．



最後に，生じた空白を 2×2 の正方形の穴に分割し (いつでも一意的に可能である)，2×2 の穴を (水平方向か垂直方向かをランダムに選択しながら) 良性ブロックで埋めると，サイズが 1 大きくなったアステカダイヤモンドのドミノタイル貼りが得られる．上の例では，埋めるべき穴は 5 つある．



シャッフリングはつねにうまく機能し，任意のタイル貼りはシャッフリングの反復によって得られることが示される (下の演習問題参照).

演習問題

164. 第 2 局面でドミノずらしを実行した結果，ドミノが重なり合ってしまわないことを示せ．(難易度：2)

165. 第 2 局面のドミノずらしの後でも，ドットの位置と矢印の向きは整合していることを示せ．(難易度：2)

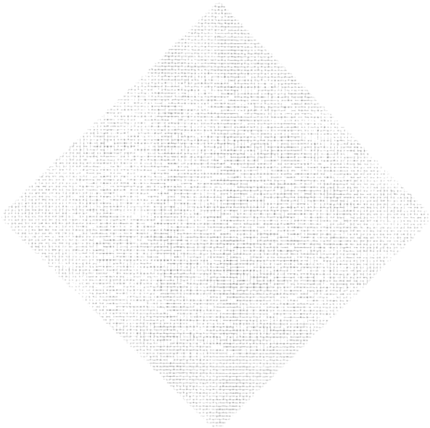
166. 生じた空白を 2×2 の正方形の穴に分割することが,「いつでも一意的に可能である」ことを示せ．(難易度：2)

167. シャッフリングを逆戻りさせることができる．すなわち，アステカダイヤモンドのドミノタイル貼りから，良性ブロックを取り除き，残ったすべてのドミノを矢印と反対向きに 1 ステップずらす．そして，最後に空白を悪性ブロックで埋めると，サイズが 1 小さいアステカダイヤモンドのタイル貼りができる．この主張の証明の概略を与えよ．すなわち，証明をいくつかの小さな段階に分け，それぞれの段階で何を示せばよいかを明らかにせよ．(難易度：3)

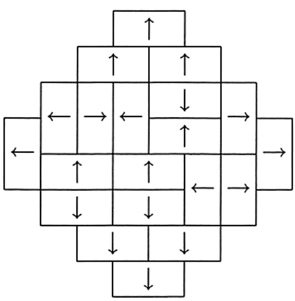
168. シャッフリング操作についての以上の情報に基づいて，m ステップの後には各ドミノタイル貼りが $2^{-m(m+1)/2}$ の一様な確率で現れるランダムドミノタイル貼りが生成されたことを示せ．(したがって，サイズ m のアステカダイヤモンドのドミノタイル貼りは $2^{m(m+1)/2}$ 通り存在する.) (難易度：3)

169. サイズ $0, 1, 2$ のアステカダイヤモンドのタイル貼りの全体を考え，1 つのタイル貼りがもう 1 つのタイル貼りに先行するのは，後者が反復シャッフリングにより前者から到達できるときであるとして，順序を定義する．このポセットのハッセ図を描け．(難易度：1)

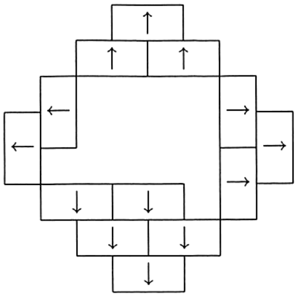
反復シャッフリングの手続きを進行させると，非常に特殊なパターンが現れてくる．次は，(ジム・プロップのウェッブページからとった) サイズ 50 のアステカダイヤモンドのランダムドミノタイル貼りの試行結果である．



ここには，タイルが整然と並んだ 4 つの領域に囲まれて，内部にタイルが無秩序に並んだ円形領域が見える．ジム・プロップは，整然とした領域に**極地帯** (または**凍結帯**)，内部のカオス=無秩序領域に**温帯**，2 つの領域の境界線に**極円**という名を与えた．もっと正確に述べると，北極地帯は上向き矢印を持ったタイルの最北端の連結成分であり，他の 3 つの極地帯も同様である．よって，アステカダイヤモンドのドミノタイル貼り



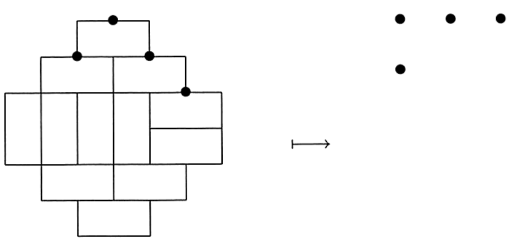
の極地帯は，



である．さて，これで，極円定理を述べられるようになった．

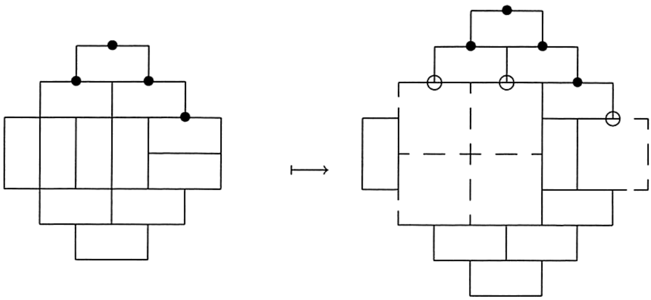
定理 11.1 (極円定理) m が限りなく大きくなるとき，アステカダイヤモンドのドミノタイル貼りで，その極円が円形から著しく外れるものの割合は，0 に限りなく近づく．

この驚くべき極円定理について，詳しいことはジョカシュ，プロップ，ショアーの 1995 の原論文を見てほしい．ここでは，極円定理と前に行ったフェラーズ盤の (タイプ II の) ランダム成長についての議論との関係について，要点を説明する．フェラーズ盤より，むしろ，フェラーズグラフを用いる方がよい．北極地帯にあるドットを考え，図を 45° 傾けると，フェラーズグラフが現れる．



シャッフリングした後に，北極地帯には何が起きているかを見てみよう．まず，極地帯にあるどのドミノも悪性ブロックには含まれていないから，それらは除去操作の際にも生き延びる．第 2 局面では，北極地帯のドミノはみないっせい

に北にずらされる．したがって，フェラーズグラフの形は保たれる．第 3 局面で北極地帯が成長するのは，境界において良性ブロックが水平に置かれて穴埋めされた場合である．境界にある穴は，フェラーズグラフの内向きの角に (下図では，白抜きの丸で示した) 現れる．各内向きの角において，新しい良性ブロックが水平に置かれるかどうかは，そして新しいドミノが北極地帯に加わり，内向きの角が新しいドットで埋められるかどうかは，$\frac{1}{2}$ の確率で決まる．



この議論の結果として，4 つの極地帯の境界線は，(タイプ II の) ランダム成長するフェラーズグラフの輪郭線 (を適当に傾けたもの) と同じ形をしていることが分かる．そして，それはジョカシュ，プロップ，ショアーの結果により，四分円に収束する．4 つの四分円が集まって極円を形成するのである．

演習問題

170. 正方形のフェラーズ盤の中央に小さな正方形の穴がある状態からスタートし，穴の境界に位置する正方形からランダムに選んだ正方形を取り除くことを繰り返して，フェラーズ盤をくりぬいていく手続きを定めるルールをいろいろ研究してみよ．円形の穴ができていくようなルールはあるだろうか．正方形の穴だったらどうだろうか．(難易度：3)

第 12 章

エピローグ

この最終章は，整数の分割のいっそう進んだ研究への誘いとしたい．

この章のポイント

- 本書で語り残されたこと．
- 新しい探求を始めるにはどこに向えばよいのか．
- 分割の研究の歴史はどこで知ることができるか．
- 未解決問題は残されているのか．

12.1　何が語り残されたのか

いよいよ分割の理論への入門も締めくくりとなる．この偉大な研究テーマの魅力あふれる側面をいくつも見てきたが，同時にそれはほんの入口に過ぎないということを何度もそれとなく注意した．読者の多くは，では，次にはどんな話が出てくるのかと思ったに違いない．

$p(n)$ の正確な公式

$p(n)$ の完全に正確な公式は与えなかった．それは，じつは，

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)k^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dx}\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{24}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x-\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=n}$$

となる．ここで $A_k(n)$ は明示的に与えることのできる 1 の 24 乗根の有限和である．まさに期待通りのものだったであろう (冗談だが).

この公式を証明するには，一変数複素関数論における精緻な技巧を必要とする．この種の研究はすべて，モジュラー形式，モジュラー関数の理論に依拠している．進んで勉強するには，G. E. Andrews “Theory of Partitions”, M. I. Knopp “Modular Functions in Analytic Number Theory” が薦められる.[1)]

q-超幾何級数

本書でも

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^n)^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}$$

や

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

のような公式をいろいろ見てきた．

これらは，q-超幾何級数の研究で得られるより一般的な定理の特別な場合である．例えば，最初の公式は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)(a-q)\cdots(a-q^{n-1})(b-1)(b-q)\cdots(b-q^{n-1})c^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)(1-c)(1-cq)\cdots(1-cq^{n-1})}$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-caq^n)(1-cbq^n)}{(1-cq^n)(1-abcq^n)}$$

の特別な場合である．

この話題について勉強するならば，もっとも完全な情報源は G. Gasper and

---

1)本章で紹介される文献は (未刊のものを除いて)，すべて付録 B の文献表に掲載されている．出版社などの情報はそちらを参照されたい．

M. Rahman "Basic Hypergeometric Series" である．q-超幾何級数の分割の理論に関係した側面は，G. E. Andrews の小冊子 "q-Series" で知ることができる．

他分野に現れる分割

分割の理論は，さまざまな組合せ論的，代数的な問題に不思議な形で現れる．例えば，q を素数ベキとして，q 個の元からなる有限体上定義された n 次元ベクトル空間の k 次元部分空間は何個あるだろうか．答えは，

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

すなわち，第 6 章で出合ったガウス多項式で与えられる．これを含め，組合せ論や代数の概念との多くの関係が (すでに引用した) "Theory of Partitions" の第 9 章，第 13 章で議論されている．より進んだ研究については，I. G. Macdonald "Symmetric Functions and Hall Polynomials", B. Sagan "The Symmetric Group"，そして，賞も受けている[2]現代の古典 R. P. Stanley "Ennumerative Combinatorics"[3]を参照してほしい．

分割の理論のいっそう驚くべき側面は，一見無関係な分野への応用可能性である．上で引用した "q-Series" の完全なタイトルは "q-Series: Their Development and Application in Analytic Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra" である．この飾り立てられたタイトルから明らかなように，さまざまな話題と多くの接点がある．

ヘンリー・マンは，彼のアルチン予想の証明に対し，アメリカ数学会からコール賞[4]を与えられた．しかし，サイエンス・サイテーション・インデックス[5]で

---

[2]優れた数学書の執筆に対し授与されるアメリカ数学会のスティール賞を 2001 年度に受賞．

[3]2 巻本であるが，第 1 巻は邦訳もある．リチャード・スタンレイ著，成嶋弘・山田浩・渡辺敬一・清水昭信訳『数え上げ組合せ論 I』日本評論社，1990.

[4]代数または整数論における優れた業績に対して贈られる．マンは 1946 年に受賞．日本人数学者では，岩澤健吉 (1962)，志村五郎 (1977)，森重文 (1990)，中島啓 (2003) が受賞している．

[5]トムソン・サイエンティフィック社が提供する科学技術文献の文献引用検索データベース．

検索すると，D. R. ホイットニーとの共著論文である "On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger Than the Other" の方が，受賞論文よりもずっと多く引用されていることが分かる．この論文の唯一の目的は，ガウス多項式で数え上げられる分割と同等な組合せ論的構造をノンパラメトリック統計におけるウィルコクスン分布のモーメントを与えるために利用することである．

12.2　新しい探求を始めるにはどこに向かえばよいのか

もちろん，前節の引用文献はみなこの本で与えた入門のレベルを超えた研究へのよい手引きである．しかし，分割の研究のためのこれまで触れてこなかった別の道もある：コンピュータだ．最近のわくわくするような発展の 1 つが，分割の研究における計算機代数の利用である．

オメガ

使い勝手のよいパッケージとして，G. E. アンドリュース，P. パウレ，A. リーゼ (Andrews, Paule, Riese, 2001) が開発したオメガ (Omega) がある．オメガは

`http://www.risc.uni-linz.ac.at/`

から手に入る．このプログラムの基礎には，和因子に関する不等式 (かなり複雑なものでもよい) を満たす分割の母関数を求めるアルゴリズムがある．例えば，$\Delta(n)$ で 3 辺の長さがすべて整数でその和が n であるような互いに合同でない三角形の個数を表す．このとき，母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n = \sum_{\substack{a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0 \\ a_2 + a_3 > a_1}} q^{a_1 + a_2 + a_3}$$

である．この級数の項についての条件をオメガに入力してやると，オメガからただちに

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n = \frac{q^3}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}$$

という出力が返ってくる．もちろん，オメガを使わずともこの公式を導くことはできる．しかし，オメガはこの結果を自動的に生成するのである．

別の好例は，1999 年のパットナム数学コンテスト[6]の問題 B3 である．それは，結局のところ

$$S(x,y) = \sum_{\substack{m,n\geq 0 \\ 2m\geq n \\ 2n\geq m}} x^m y^n, \quad |x|<1, \quad |y|<1$$

の閉じた表示を求めることに帰着する．オメガは即座に

$$s(x,y) = \frac{1+xy+x^2y^2}{(1-x^2y)(1-y^2x)}$$

と答えてくれる．

12.3 分割の研究の歴史はどこで知ることができるか

すでに指摘したように，分割の研究は 18 世紀にオイラーによるキックオフで始まった．以来 1920 年までの分割の研究の歴史の完全な記述ならば，参照すべきは (取り付きやすくするためのコメントはまったくないが) L. E. Dickson の "History of the Theory of Numbers" の第 2 巻 3 章である．Robin Wilson による出版予定の本 "History of Combinatorics" には，これほど完全ではないが，もっとゆったりと書かれた記事が含まれている．

最近二，三十年間のこの分野のさまざまな面での進展については，有益な総合報告がいくつかある．特に，H. L. Alder "Partition identities — from Euler to the Present", G. E. Andrews "Partition Identities" を見よ．

最後に，分割の研究の歴史は，インドの天才スリニバサ・ラマヌジャンの驚異的な仕事に言及しなければ完全なものとはいえない．ラマヌジャンの全集 (Ramanujan, 1927)，および，ブルース・バーントがラマヌジャンの仕事を解読した 5 巻本 (Berndt, 1985, 1989, 1991, 1994, 1998) がある．

---

[6]アメリカ数学協会 (MAA) が行う北アメリカの大学生対象の数学コンテスト．1938 年に始まる．2000 人以上の大学生が参加し，6 時間かけて 12 問に挑戦する．

12.4　未解決問題は残されているか

未解決問題はいくらでもある．すでに，4.3 節でアルダーの予想を述べた．ここでは，すでに本書で学んだ知識以上のことを必要としない未解決問題を 3 つ紹介しよう．

ボールウェインの問題

$B_e(N;n)$, $B_o(N;n)$ で，それぞれ，偶数個，奇数個の相異なる和因子への分割で，和因子はすべて $3N$ 未満で 3 の倍数ではないという条件を満たすものの個数を表す．任意の正整数 N, n に対し，

$$B_e(N;n) - B_o(N;n)$$

は，n が 3 の倍数のとき非負であり，そうでないとき非正であることを証明せよ．

この予想の背景は，G. E. Andrews "On a Conjecture of Peter Borwein" (Andrews, 1995) に述べられている．

ライプニッツの問題

ライプニッツは，(1 も素数と思うことにして) $n \leq 6$ に対して $p(n)$ が素数であることを根拠に，$p(n)$ はつねに素数ではないかと示唆した．もちろん，$p(7) = 15$ だから，この予想は次のような問題に修正されねばならない．$p(n)$ は無限に多くの n に対して素数となることを証明せよ．(Ono, 2000) では，どの素数も少なくとも 1 つの $p(n)$ を割り切ることが証明されている．

$p(n)$ の偶奇性

最近，ケン・オノは $p(n)$ の可除性について目覚しい発見を行っている ((Ono, 2000) 参照)．だが，多くの問いがいまだ未解決である．例えば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{m \mid m \leq n,\ \text{かつ},\ p(m)\ \text{は偶数}\ \}|}{n} = \frac{1}{2}$$

を証明せよ．言い換えれば，$p(n)$ の値の約半分は偶数であることを証明せよ．

本書を読み終わった読者に，
次は未解決問題に挑戦するようエールを送りたい．
勉強も楽しいが，研究はもっと楽しいはずだ．

付録 A

無限級数と無限積の収束

本書で扱ったすべての無限級数は，解析学における 2 つの標準的な判定法によって，その収束を示すことができる．

比判定法 (ダランベールの判定法)

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ならば，絶対収束する．

累乗根判定法 (コーシーの判定法)

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は，$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ ならば，絶対収束する．

例えば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

は $|q|<1$ において絶対収束する．これを見るには，比判定法を用いればよい．実際，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n+1})}\Big/\frac{z^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{zq^n}{1-q^{n+1}}\right|=0 \quad (|q|<1 \text{ のとき})$$

である．累乗根判定法の例を示すために，第 6 章で証明した

$$\lim_{n\to\infty}p(n)^{\frac{1}{n}}=1$$

を思い出そう．これより，$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ は $|q| < 1$ において絶対収束することがわかる．実際，

$$\lim_{n\to\infty} |p(n)q^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} p(n)^{\frac{1}{n}} |q| = |q|$$

であるから，$|q| < 1$ が問題の無限級数の絶対収束を保証する．

無限積は，通常の解析学の講義では省略されることもあるので，それほど親しみがないかもしれない．次の式の右辺の極限が存在して 0 ではないとき，

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)\\ &= \lim_{N\to\infty}(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_N)\end{aligned}$$

と定義し，無限積は収束するという．

$\prod_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|)$ が収束するとき，$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ は絶対収束するという．無限積の収束に関する 3 つの主張を証明しよう．

主張 1

すべての n に対し $a_n \geq 0$ のとき，$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ と $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ とは同時に収束，または，発散する．

この主張は，不等式

$$1 + a_0 + a_1 + \cdots + a_N \leq \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leq e^{a_0+a_1+\cdots+a_N}$$

からただちにしたがう．左側の不等式は N に関する数学的帰納法で証明できる．右側の不等式は任意の実数 x に対し

$$1 + x \leq e^x$$

が成り立つという事実の直接の結論である．

主張 2

すべての n に対し $1 > a_n \geq 0$ のとき，$\prod_{n=0}^{\infty}(1-a_n)$ と $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ とは同時に収束，または，発散する．

この主張の証明は，前の主張に比べるといささか微妙な点がある．それは，無限積の定義において極限値が 0 でないことを要求していることを考慮に入れなければならないからである．しかし，証明のアイディアそのものは同じであり，類似の不等式

$$\begin{aligned} 1 - a_N - a_{N+1} - \cdots - a_m &\leq (1 - a_N)(1 - a_{N+1}) \cdots (1 - a_m) \\ &\leq e^{-a_N - a_{N+1} + \cdots - a_m} \qquad (m \geq N) \end{aligned}$$

を利用する．

まず，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定すると，$\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \frac{1}{2}$ となる N を見出すことができる．これは，部分積 $\prod_{n=0}^{m}(1 - a_n)$ がつくる非増加列が $(m \geq N$ に対して$)$

$$\frac{1}{2} \prod_{n=0}^{N-1} (1 - a_n)$$

によって下から抑えられることを意味し，これより，正の極限値に収束する，すなわち，無限積が収束することがしたがう．

逆に，無限積が収束すると仮定するならば，正定数 c で

$$0 < c < (1 - a_0)(1 - a_1) \cdots (1 - a_N) \leq e^{-a_0 - a_1 - \cdots - a_N}$$

を満たすものがとれる．このとき，

$$\log c \leq -a_0 - a_1 - \cdots - a_N,$$

書き換えると，$a_0 + a_1 + \cdots + a_N \leq \log \frac{1}{c}$ が成り立つ．よって，部分和は有界な (広義) 単調増加列をなすから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する．

主張 3

すべての n に対し $|a_n| < 1$ で，$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + |a_n|)$ が収束するならば，$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$ も収束する．

この第 3 の主張が真であることを見るために，

$$P_N = \prod_{n=0}^{N} (1 + |a_n|), \quad p_N = \prod_{n=0}^{N} (1 + a_n)$$

とおく．まず，

$$\begin{aligned}|p_N - p_{N-1}| &= |(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_{N-1})a_N| \\ &\leq (1+|a_0|)(1+|a_1|)\cdots(1+|a_{N-1}|)\,|a_N| \\ &= P_N - P_{N-1} \end{aligned} \tag{A.1}$$

である．この不等式から数学的帰納法により，$R > S$ ならば

$$|p_R - p_S| \leq P_R - P_S$$

が成り立つことを導くのは簡単な練習問題である．したがって，数列 P_N が収束するなら数列 p_N も収束しなければならない．残っていることは，$\lim_{N\to\infty} p_N \neq 0$ であることの証明である．しかし，これは，不等式

$$|p_N| \geq (1-|a_0|)(1-|a_1|)\cdots(1-|a_N|)$$

と

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ は収束する，

(ii) $|a_n| < 1$,

(iii) 主張 2 より，$\prod_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)$ が正の極限値に収束するが，これはそのすべての部分積がある正定数により下から抑えられることを意味する，

という 3 つの事実よりしたがう．

付録 B

参考文献

H. L. Alder Partition identities–from Euler to the present, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969) 733–746.

K. Alladi The method of weighted words and applications to partitions, *Number Theory* (Paris, 1992–1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **215**, Cambridge University Press, Cambridge 1995, pp. 1–36.

K. Alladi, G. E. Andrews, and A. Berkovich A new four parameter q-series identity and its partition implications, *Invent. Math.* **153** (2003) 231–260.

G. E. Andrews On radix representation and the Euclidean algorithm, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969a) 66–68.

G. E. Andrews Two theorems of Euler and a general partition theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969b) 499–502.

G. E. Andrews On a partition problem of H. L. Alder, *Pac. J. Math.* **36** (1971a) 279–284.

G. E. Andrews The use of computers in search of identities of the Rogers-Ramanujan type, *Computers in Number Theory*, A. O. L. Atkin and B. J. Birch, eds., Academic Press, London–New York, (1971b) pp. 377–387.

G. E. Andrews A combinatorial proof of a partition function limit, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971c) 276–278.

G. E. Andrews Partition identities, *Advances in Math.* **9** (1972) 10–51.

G. E. Andrews Partition ideals of order 1, the Rogers-Ramanujan identities and computers, *Groupe d'Étude d'Algèbre (Marie-Paule MALLIAVIN), 1re année* (1975/76), Exp. No. 6, Secrétariat mathématique, Paris, 1978 (8 pages).

G. E. Andrews Partitions and Durfee dissection, *Amer. J. Math.* **101** (1979) 735–742.

G. E. Andrews On a partition theorem of N. J. Fine, *J. Nat. Acad. Math. India* **1** (1983) 105–107.

G. E. Andrews Generalized Frobenius partitions, *Mem. Amer. Math. Soc.* **49** (1984), No. 301.

G. E. Andrews *q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra*, CBMS Regional Conference Series, No. 66, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986.

G. E. Andrews On a conjecture of Peter Borwein, *J. Symbolic Computat.* **20** (1995) 487–501.

G. E. Andrews *The Theory of Partitions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1998.

G. E. Andrews Partitions: At the interface of q-series and modular forms, *Ramanujan J.* **7** (2003) 385–400.

G. E. Andrews, P. Paule, and A. Riese MacMahon's partition analysis: The Omega package, *European J. Combin.* **22** (2001) 887–904.

A. O. L. Atkin and H. P. F. Swinnerton-Dyer Some properties of partitions, Proc. London Math. Soc. **4** (1954) 84–106.

A. Berkovich and B. M. McCoy Rogers-Ramanujan identities: A century of progress from mathematics to physicis, Doc. Math. J. DMV, Extra Volume ICM 1998, III, pp. 163–172.

B. C. Berndt *Ramanujan's Notebooks, Parts I–V*, Springer-Verlag, New York, 1985, 1989, 1991, 1994, 1998.

M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson Lecture hall partitions, *Ramanujan J.* **1** (1997a) 101–110.

M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson Lecture hall partitions II, *Ramanujan J.* **1** (1997b) 165–185.

M. Bousquet-Mélou and K. Eriksson A refinement of the lecture hall theorem, *J. Combin. Theory Ser. A* **86** (1999) 63–84.

D. M. Bressoud A new family of partition identities, *Pacific J. Math.* **77** (1978) 71–74.

D. M. Bressoud Some identities for terminating q-series, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **89** (1981) 211–223.

L. Carlitz Rectangular arrays and plane partitions, *Acta Arith.* **13** (1967) 29–47.

R. Chapman A new proof of some identities of Bressoud, *Int. J. Math. and Math. Sciences* **32** (2002) 627–633.

L. E. Dickson *History of the Theory of Numbers,* Vol. 2, *Diophantine Analysis,* Carnegie Institute of Washington, Washington, 1920 (Reprinted: Dover, New York, 2005).

F. J. Dyson Some guesses in the theory of partitions, *Eureka* (*Cambridge*) **8** (1944) 10–15.

N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp Alternating-sign matrices and domino tilings I, II, *J. Algebraic Combin.* **1** (1992) 111–132, 219–234 .

G. Gasper and M. Rahman *Basic Hypergeometric Series, Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **96**, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.

G. H. Hardy *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1940 (Reprinted: AMS Chelsea Publication, Providence, R.I., 1999).

W. Jockusch, J. Propp and P. Shor Random domino tilings and the arctic circle theorem, `http://www.math.wisc.edu/~propp/articles.html` より入手可能.

R. Kanigel *The Man Who Knew Infinity*, Washington Square Press, New York, 1991. (邦訳：田中靖夫訳『無限の天才—夭折の数学者・ラマヌジャン』工作舎, 1994.)

D. Kim and A. J. Yee A note on partitions into distinct and odd parts, *Ramanujan J.* **3** (1999) 227–231.

M. I. Knopp *Modular Functions in Analytic Number Theory, Second Edition*, Chelsea, New York, 1993.

I. G. Macdonald *Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition*, Oxford University Press, New York, 1995.

P. A. MacMahon Memoir on the theory of partition of numbers I, *Phil. Trans.* **187** (1897) 619–673 (Reprinted: *Collected Papers*, pp. 1026–1080).

P. A. MacMahon *Combinatory Analysis,* Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1916 (Reprinted: Dover, New York, 2004).

H. B. Mann and D. R. Whitney On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, *Ann. Math. Statistics* **18** (1947) 50–60.

K. Ono Distribution of the partition function modulo m, *Ann. of Math.* **151** (2000) 293–307.

B. Pittel On a likely shape of the random Ferrers diagram, *Adv. in Appl. Math.* **18** (1997) 432–488.

S. Ramanujan *Collected Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1927 (Reprinted: AMS Chelsea Publication, Providence, R.I., 2000).

H. Rost Non-equilibrium behavior of a many particle process: density profile and local equilibria, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **58** (1981) 41–53.

B. Sagan *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Wadsworth, Pacific Grove, Calif., 1991; *Second Edition*, Graduate Texts in Mathematics **203**, Springer-Verlag, 2001

I. Schur Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zue Theorie der Kettenbrüche, *S.-B. Preuss. Akad. Wies. Phys.-Math. Kl.,* pp. 302–321 Reprinted: *Ges. Abhandlungen,* Vol. 2, pp. 117–136).

I. Schur Zur additiven Zahlentheorie, *S.-B. Preuss. Akad. Wies. Phys.-Math. Kl.,* pp. 488–495 (Reprinted: *Ges. Abhandlungen,* Vol. 3, pp. 43–50).

R. P. Stanley *Enumerative Combinatorics,* Vol. 1, Wadsworth, Pacific Grove, Calif., 1986; *Second Edition*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. (邦訳：成嶋弘・山田浩・渡辺敬一・清水昭信訳『数え上げ組合せ論 I』日本評論社，1990.)

R. P. Stanley *Enumerative Combinatorics,* Vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

M. V. Subbarao On a partition theorem of MacMahon–Andrews, *Proc. Amer. Math. Soc.* **27** (1971a) 449–450.

M. V. Subbarao Partition theorems for Euler pairs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **28** (1971b) 330–336.

J. J. Sylvester A constructive theory of partitions arranged in three acts, an interact and an exodion *Amer. J. Math.* **5** (1884) 251–330, **6** (1886) 334–336 (Reprinted: *Collected Papers,* Vol. 4, pp. 1–83).

A. J. Yee On the combinatorics of lecture hall partitions, *Ramanujan J.* **5** (2001) 247–262.

A. J. Yee On the refined lecture hall theorem, *Discrete Math.* **248** (2002) 293–298.

●参考文献に関する訳者付記

本書を読んだ後に学ぶべきことは，第 12 章にとてもよく書かれている．本書の延長線上にあるものとして，(Andrews, 1998), (Stanley, 1986/1997, 1999) は，訳者としてもやはりおすすめしたい．上記文献表にあるほとんどが英語であり翻訳されていないが，ある程度まとまったページ数を読んでみれば，数学の英語はさほど難しくないことが分かると思う．

日本語で読める関連文献 (あまり多くない) についてコメントする．

- ハーディ–ライト著，示野信一訳『数論入門 2』シュプリンガー・フェアラーク東京，2001

の第 19 章で整数の分割が説明されている．その内容は，ほとんど本書に含まれているが，$p(n)$ の満たす合同式についての記述は本書より詳しい．

第 12 章でも注記したが，おすすめ本の (Stanley, 1986) には翻訳がある．

- リチャード・スタンレイ著，成嶋弘・山田浩・渡辺敬一・清水昭信訳『数え上げ組合せ論 I』日本評論社，1990

整数の分割に限らず，組合せ論の広い話題を扱っている．本書の内容のある程度の部分は，演習問題を含めると，この本の各所にちりばめられている．スタンレイの本への入門書というべきものが，

- 成嶋弘著『数え上げ組合せ論入門』日本評論社，1996; 改訂版，2003

である．整数の分割についても 1 節があてられている．群論と組合せ論の接点については，

- 寺田至著『ヤング図形の話』日本評論社，2002

が入門として適当であろう．また，

- グスコーホドリ「ヤング図形と遊ぼう (その 1-3)」,『数学セミナー』1983 年 5-7 月号所収

で，11.3 節でちょっとだけ触れられている確率論的アイディアに基づくフック長公式の証明，演習問題 152 の略解に名前だけ出てくるロビンソン-シェンステッド-クヌースの対応の解説を読むことができる．

本書では，分割の研究におけるコンピュータの役割が強調されている (特に，4.2, 12.2 節)．実験してみるには，マテマティカのような数式処理ソフトがもっとも手軽である．マテマティカのパッケージ “Combinatorica” を読み込めば，与えられた正整数 n の分割をすべて生成する関数や，与えられた分割のフェラーズグラフを表示する機能などを利用でき，演習問題 50–55 に必要なデータを得たり，フェラーズ盤のランダム成長の実験をしたりすることが容易にできる．参考書としては，

- S. スキエナ著，植野義明訳『Mathematica，組み合わせ論とグラフ理論—離散数学を実現する—』アジソンウェスレイ・トッパン情報科学シリーズ 28, 1992

がある．上記の成嶋弘著『数え上げ組合せ論入門』(の旧版) にもマテマティカのプログラムが多数掲載されているので参考になるだろう．

本書でしばしば登場したラマヌジャンについては，伝記 (Kanigel, 1991)，および，書簡集が翻訳されていて楽しく読める．

- ロバート・カニーゲル著，田中靖夫訳『無限の天才』工作舎，1994
- B. C. バーント–R. A. ランキン編著，細川尋史訳『ラマヌジャン書簡集』シュプリンガー・フェアラーク東京，2001

付録 C

演習問題の略解とヒント

3 等式 $p(n\,|\,$和因子は偶数$) = p\left(\dfrac{n}{2}\right)$ を示す明らかな全単射がある．すなわち，任意の偶数和因子への分割に対し，すべての和因子を $\dfrac{1}{2}$ にしてやればよい．等式 $p\left(\dfrac{n}{2}\right) = p(n\,|\,$同じ値を持つ和因子の個数は偶数$)$ を示す全単射も容易に得られる．すなわち，$\dfrac{n}{2}$ の任意の分割に対し，各和因子のコピーを 1 個ずつ付け加えて和因子の個数を 2 倍に増やしてやればよい．

4 等分・融合操作の各段階で奇数和因子の個数の変化は偶数である (偶数和因子を奇数和因子に等分したならば $+2$，奇数和因子を融合したならば -2 となり，その他の場合は変化しない)．したがって，奇数和因子の個数の偶奇は操作の全過程で変わらない．

7 M を 2 のベキ，または，2 のベキの 3 倍となる正整数の全体とする．このとき，定理 1 により，$p(n\,|\,$和因子は相異なり，M に含まれる$)$ は $p(n\,|\,$和因子は $\{1,3\}$ に含まれる$)$ に等しい．明らかに，そのような分割に現れる 3 の個数の選び方は $\left\lfloor\dfrac{n}{3}\right\rfloor + 1$ 通りあり，残りはすべて 1 であるから，そのそれぞれの場合ごとに分割が一通りに定まる．

8 どちらか一方にのみ含まれる整数のうちで最小のものを n とし，n を含む方を M，含まない方を M' とする．このとき，$p(n\,|\,$和因子は相異なり，M に含まれる$) = 1 + p(n\,|\,$和因子は相異なり，M' に含まれる$)$ が成り立つ．n だけからなる分割を除けば，この 2 種類の分割は一致しているからである．

9 N' を N の元であり，N の他の元の 2 ベキ倍になっていないものの集合とする．M' で N' の元，および，N' の元の 2 ベキ倍の全体を表す．このとき，定理 1 により，(N', M') はオイラーペアである．$2^k a$ は N' に属さない N の元で最小のものである．したがって，(N, M) がオイラーペアになるように，M を構成しようとすると，

$2^k a$ 未満では，M' の構成とまったく同じに進行する．しかし $2^k a$ で M の構成は破綻する．なぜならば，$2^k a$ はすでに M' に含まれているから，M を大きくとっても，和因子を M' に含まれる相異なる分割以上のものは得られない．その一方で，和因子が N に含まれる $2^k a$ の分割は，和因子が N' に含まれる $2^k a$ の分割よりも $2^k a$ だけからなる分割の分だけ多いからである．

10 条件 $2M \subset M$ は，M の任意の元の 2 ベキ倍がまた M に属していることを意味する．条件 $N = M - 2M$ は N が M の元で M の他の元の 2 ベキ倍になっていないものの集合であることを意味する．したがって，N は，ある N の元の 2 ベキ倍となるような数を含んでいない．そして，M は N の元とそのすべての 2 ベキ倍からなる集合である．したがって，(N, M) はオイラーペアである．逆に，(N, M) がオイラーペアならば，$2M = M$ かつ $N = M - 2M$ であることはすぐ分かる．

12 フェラーズ盤とは，等間隔に並んだドットの行の集まりで，左端で直線的にそろえられ，各行の長さは (一番下の行を除いて) そのすぐ下の行の長さ以上となっているものである．

13 ヒント：2 つの隣り合う外向きの角は，その間にある内向きの角の位置を定める．

14 ヒント：2 つの隣り合う内向きの角は，その間にある外向きの角の位置を定める．

15 ヒント：すべての内向きの角は，分割を拡大した後に，次の列の新しい内向きの角を定める．さらに，第 1 列の一番下には，つねに内向きの角がある．

16 a) $6+4+2$, b) $2+1+1+1+1+1+1$, c) $5+4+2+2+1$.

18 分割の和因子が m 以下だということは，フェラーズグラフの第 1 行の長さが m 以下だということである．分割の和因子の個数が m 個以下だということは，フェラーズグラフの第 1 列の長さが m 以下だということである．共役がこれら 2 種類のフェラーズグラフの間の全単射を与えることは，明らかである．

24 自己共役でない分割は，共役によって 2 個ずつのペアにまとまるので，$p(n)$ の偶奇に影響を与えない．よって，$p(n)$ が奇数であることと $p(n \mid$ 自己共役$)$ が奇数であることは同値である．これは，(3.4) により，$p(n \mid$ 和因子は相異なる奇数$)$ が奇数であることとも同値になる．

25 1 辺の長さ j のダーフィー正方形をもつ任意の分割は，ダーフィー正方形 (そのサイズは j^2)，その下にある行の長さがみな j 以下のフェラーズ盤 (サイズを m とおく)，その右にある和因子の個数が高々 j 個のフェラーズ盤 (サイズは $n - j^2 - m$) に一意的に分解される．

27 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.$

29 等式 $F_n = F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \cdots$ が $n = 2$，$n = 4$ に対して正しいことは，すぐに確かめられる．n が偶数で > 4 のときは，数学的帰納法より $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = F_{n-1} + (F_{n-3} + F_{n-5} + \cdots)$ となる．

30 ヒント：n の 1 と 2 からなる結合は，最後の項が 1 のものと，2 のものという 2 種類に分類される．

31 分割関数とフィボナッチ数とが異なる最初の値は $n = 5$ である．$p(5) = 7 \neq 8 = F_5$．これは，$n - 2$ の分割で，1 でない最小和因子が (和因子のうちの 1 の個数) $+ 2$ よりも小となるものが存在する最初の数が $n = 5$ だからである．この条件を満たす分割は $2 + 1$．

32 ヒント：$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}$.

33 高さ 4 の階段に含まれるフェラーズ盤は $C_4 = \binom{8}{4}/5 = 14$ 個ある．$3+2+1, 3+2, 3+1+1, 3+1, 3, 2+2+1, 2+2, 2+1+1, 2+1, 2, 1+1+1, 1+1, 1$, そして，空の分割である．

35 奇数和因子はグラフの下側の行から得られる．奇数和因子の個数を k とする．このとき，グラフの構成法より，最小の偶数和因子は垂直線の左側に $2k + 1$ 個のドットを持っている．よって，どの偶数和因子も奇数和因子の個数の 2 倍より大きい．

36 和因子は相異なり，どの偶数和因子も奇数和因子の個数の 2 倍より大きいような分割が与えられたとする．先に偶数和因子に対応する行が大きい順に並び，次に奇数和因子に対応する行が大きい順に並ぶように，フェラーズグラフを並べなおす．左端を一段下の行が 2 ずつ右にずれていくようにさらに配置しなおす．垂直線をその左側には最後の行のドットが 1 個だけになるように引く．どの行も垂直線の左側に空白ができないことを示さねばならない．異なる奇数の行の間の差は少なくとも 2 あるから，奇数の行では空白は生じない．k を奇数和因子の個数とすると，最小の偶数和因子は $2k + 2$ 以上であるから，対応する行において空白は生じない．より大きい偶数の行については奇数の場合と同様である．垂直線の右側の行を大きい順に並べなおせば，和因子が超相異なる分割が得られる．これが逆を与えていることは明らかである．

39 ヒント：フランクリンの方法のように，最小和因子をペアの間で移動させる．

41 フランクリンの全単射は最大和因子の偶奇を必ず変化させる．

43 シルベスターの全単射は，相異なる奇数への分割ではないような分割を同種の分

割に変換し，和因子の個数を 1 だけ変化させる．したがって，そのような分割のうち，和因子の個数が偶数のものと奇数のものは同じだけ存在する．これより，差

$$p(n \mid \text{和因子の個数は偶数}) - p(n \mid \text{和因子の個数は奇数})$$

を計算するには，和因子が相異なる奇数であるような分割だけを考慮すればよい．しかし，奇数和因子の奇数個の和は奇数であり，偶数個の和は偶数である．すなわち，このような分割について和因子の個数の偶奇は n の偶奇と一致する．したがって，相異なる奇数和因子への分割はすべて n が偶数なら正の，n が奇数なら負の寄与をする．

44 シルベスターの全単射は，偶数和因子の個数を 1 だけ変化させる．これより，差

$$p(n \mid \text{偶数和因子の個数は偶数}) - p(n \mid \text{奇数和因子の個数は奇数})$$

を計算するには，前問と同様，和因子が相異なる奇数であるような分割だけを考慮すればよい．しかし，相異なる奇数和因子への分割において偶数和因子の個数はつねに 0 で偶数である．

45 タイプ (4.1) でない分割恒等式の例には，

$$p(n \mid \text{自己共役}) = p(n \mid \text{和因子は相異なる奇数})$$

がある．

46 $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$ だから，λ_1 個の 3 と $\lambda_1 - 2\lambda_1$ 個の 1 からなる n の分割を作れる．この構成は明らかに可逆であり，全単射を与える．

48 $\frac{3}{2}\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$ となる n の分割 $\lambda_2 + \lambda_1$ から，$\lambda_2 - \lambda_1$ 個の 5 と $3\lambda_1 - 2\lambda_1$ 個の 2 からなる n の分割を作れる．逆に e_5 個の 5 と e_2 個の 2 からなる n の分割は $\lambda_2 = 3e_5 + e_2$, $\lambda_1 = 2e_5 + e_2$ とおくと，不等式の条件を満たす分割 $\lambda_2 + \lambda_1$ に戻ることができる．

50 $N = \{2, 3, 7, 8, \cdots\}$．言い換えると，法 5 で 2 または 3 に合同なすべての正整数の集合．

51 $N = \{1, 4, 7, 9, 12, 15, \cdots\}$．言い換えると，法 8 で 1,4 または 7 に合同なすべての正整数の集合．

52 $N = \{3, 4, 5, 11, 12, 13, \cdots\}$．言い換えると，法 8 で 3,4 または 5 に合同なすべての正整数の集合．

53 $N = \{1, 5, 7, 11, \cdots\}$．言い換えると，法 6 で 1 または 5 に合同なすべての正整数の集合．

56 $d=3$ に対しては，N の最初の 4 個の元は $\{1,5,7,9\}$ だと分かる．しかし，$n=10$ に対して，和因子が N に属す分割がすでに $(1^{10},5^1 1^5,5^2,7^1 1^3,9^1 1^1)$ と 5 個できるのに，3-差的な分割は $(10,9+1,8+2,7+3)$ の 4 個しかない．$d=4$ に対しては，N の最初の 5 個の元は $\{1,6,8,10,15\}$ だと分かる．しかし，$n=16$ に対して，和因子が N に属す分割がすでに 9 個できるのに，4-差的な分割は 8 個しかない．

59 N は 3 で割れないすべての奇数を含んでいる．一方，M は 3 で割れないすべての正整数の集合である．3 で割れないという性質は，融合・等分操作で変わらない性質である．

63 ロジャース–ラマヌジャンの第 1 恒等式より，N は法 5 で ± 1 と合同な正整数の集合である．

98
$$\sum_{m=0}^{N} q^{\frac{m(m+1)}{2}} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^N),$$
$$\sum_{m=0}^{N} (-1)^m q^{\frac{m(m+1)}{2}} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^N).$$

111 12 が唯一の長さ 1 の講義室分割である．長さ 2 のものは，他に $1+11, 2+10, 3+9, 4+8$ がある．長さ 3 のものは，$1+2+9, 1+3+8, 1+4+7, 2+4+6$ が加わる．最後に，長さ 4 だと，さらに $1+2+3+6, 2+3+7, 5+7$ が増える．

112 $\mathcal{L}_N \subset \mathcal{L}_{N+1}$ は，不等式 $\dfrac{\lambda_k}{k} \le \dfrac{\lambda_{k+1}}{k+1}$ が成り立てば不等式 $\dfrac{\lambda_k}{k+1} \le \dfrac{\lambda_{k+1}}{k+2}$ も成り立つということと同値である．そして，後者は，任意の正整数 k に対して $\dfrac{k}{k+1} \le \dfrac{k+1}{k+2}$ という簡単な事実からすぐに導かれる．

113 隣り合う和因子は不等式 $\lambda_k \le \dfrac{k}{k+1}\lambda_{k+1}$ を満たす．$\lambda_{k+1} \ne 0$ ならば，この不等式の右辺は λ_{k+1} より真に小さい．

116 ヒント：これは，演習問題 46 に他ならない．

119 10 未満の奇数 3 個への 19 の分割は $9+9+1, 9+7+3, 9+5+5, 7+7+5$ の 4 通りある．一方，$s(\lambda)=3$，長さ 5 をもつ 19 の講義室分割も $8+11, 1+8+10, 1+2+7+9, 2+3+6+8$ の 4 通りである．

120 S 個の奇数和因子への n の分割の個数は，相異なる和因子への n の分割 λ で $s(\lambda)=S$ を満たすものの個数に等しい．

121 $0+0$ と $0+1$.

124 講義室分割が簡約されているとは，どの 1 つの $k=1,2,\cdots,N$ に対しても，第 k 和因子から k を引いたら講義室分割にならないということであった．したがって，長さ N の簡約講義室分割は，長さ $N-1$ の簡約講義室分割に第 N 和因子を付け加えて得られる．そこで，$\lambda_1,\cdots,\lambda_{N-1}$ が与えられたとき，λ_N の選び方が N 通りであることを示す．それには，まず，$\dfrac{\lambda_{N-1}}{N-1} \leq \dfrac{\lambda_N}{N}$ を満たす最小の λ_N をとり，あとは，それに 0 から $N-1$ までの任意の整数を加えればよい．

126 $N=2$ に対して，ブロックは $1+2$(重み 3)，$0+2$(重み 2) の 2 つであり，一方，簡約講義室分割は $0+0$(重み 0)，$0+1$(重み 2) の 2 つである．よって，母関数は

$$\frac{q^0+q^1}{(1-q^3)(1-q^2)} = \frac{(1-q^2)/(1-q)}{(1-q^3)(1-q^2)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)}$$

である．

127 長さ N の簡約講義室分割の母関数が

$$\frac{(1-q^{1+2+\cdots+N})(1-q^{2+\cdots+N})\cdots(1-q^N)}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2N-1})}$$

であることを示せばよい．これで問題は簡約講義室分割の母関数を求めることに帰着したが，だからと言ってこれがやさしい問題だというわけではない．

128 全単射法による証明：$2N$ 未満の奇数和因子への分割に対し，N 以下で等しい和因子があれば，それを融合することを繰返せ．逆は，偶数和因子を等分せよ．母関数法による証明とは，この場合，

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2N-1})} = \frac{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^N)}{(1-q^{N+1})(1-q^{N+2})\cdots(1-q^{2N})}$$

を示すことである．これは，恒等式

$$\frac{(1+q^k)}{(1-q^{2k})/(1-q^k)} = 1$$

を用いれば容易である．

139 和因子が 1 個の分割，または，その共役分割．

140 フェラーズ盤で考えると，λ が μ を含むとき，その共役も同じ包含関係を満たしていることは明らかである．

141 辞書で用いられている順序を**辞書式順序**という．それは,(和因子が大きい順に

並んでいるとして) 分割を正整数をアルファベットとする単語とみなし辞書のように整列させる．たとえば，この順序を $<_{\text{lex}}$ と表すと $1 <_{\text{lex}} 1+1 <_{\text{lex}} 1+1+1 <_{\text{lex}} \cdots <_{\text{lex}} 2 <_{\text{lex}} 2+1 <_{\text{lex}} 2+1+1 <_{\text{lex}} \cdots <_{\text{lex}} 2+2 <_{\text{lex}} \cdots$ となる．(lex は "lexicographic" (= 辞書式) の略．)

143 通常順序 $\lambda \preceq \mu$ は不等式 $\lambda_1 \leq \mu_1,\ \lambda_2 \leq \mu_2,\ \lambda_3 \leq \mu_3, \cdots$ によって定義される．これらの不等式から支配的順序を定める不等式が導けることは明らかである．逆は成り立たない．たとえば，$1+1 \trianglelefteq 2$ だが，$1+1 \not\preceq 2$.

145 5 個の正方形を含む標準盤の個数は 26 個.

149 n がサイズ 1 の部分集合 (自分自身だけからなる集合) に属すとき，その他の元の分割の仕方は $n-1$ 個の元からなる集合の分割の仕方と同じ．n がサイズ 2 の部分集合に属すとき，n とペアをなす元の選び方が $n-1$ 通り，その他の元の分割の仕方は $n-2$ 個の元からなる集合の分割の仕方と同じ.

150 $f^6 = 1,\ f^{5+1} = 5,\ f^{4+2} = 9,\ f^{4+1+1} = 10,\ f^{3+3} = 5,\ f^{3+2+1} = 16.$

152 $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$ の値は $n!$ である．これは，ロビンソン–シェンステッド–クヌース対応によって証明される ((Stanley, 1999) 参照).

153 2 行の分割 $n+m$ に対して，フック長公式は $\dfrac{(n+m)!(n+1-m)}{(n+1)!m!}$ となることを示せ．後は，再帰的関係式を確かめればよい.

157 01 の系列はフェラーズ盤の縁の情報を与えている．0 は 1 ステップ上への移動，1 は 1 ステップ右への移動を表すと解釈する．このとき，01 のパターンは，1 ステップ上がり 1 ステップ右に移動する，すなわち，内向きの角を表す．この内向き角に正方形を付け加えると，パターンは 10 に変化する.

160 白黒に塗り分けられたチェス盤において，ドミノはつねに白黒 1 個ずつを覆う．したがって，チェス盤の部分集合がドミノで覆われたとすれば，白の個数と黒の個数は等しくなければならないから，同じ色の正方形だけを取り除くとドミノで覆うことはできなくなる．ところが，対角線で向かい合う角に位置する正方形は同じ色である.

161 ヒント：隣り合う正方形を順にたどり，すべての正方形を通って元に戻る閉じた道を見つける (これはやさしい)．白と黒の正方形を 1 個ずつ取り除くと，この道は 2 つの部分に分断される．どちらの部分も白の端点と黒の短点とを持つから，長さは偶数であり，ドミノで覆うことができる.

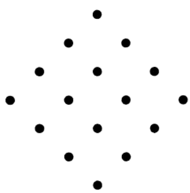
162 ヒント：階段型フェラーズ盤は白の正方形と黒の正方形を同数持つことはできな

いことを示せ．

163 フェラーズ盤がドミノで覆われるためには，白の正方形と黒の正方形を同数持つことが必要条件であることは明らかである．じつは，これは十分条件でもある．十分であることは，数学的帰納法で証明できる．盤は階段型ではありえないから (前問) その縁のどこかにドミノを置ける場所がある．そのドミノを取り去った小さなフェラーズ盤も条件を満たしている．

164 ヒント：移動したドミノが重なりあるような配置がいくつか考えられるが，それらはどれもドットや矢印の付け方から排除される．

165 アステカダイヤモンドにふったドットを無限に広がった正方格子の格子点の一部とみなす．



ドミノずらしの際に，てっぺんのドミノは上に 1 ステップ移動し，ドットパターンの全体も (左右，または，上下に) 1 ステップだけ格子上を移動する．すべてのドミノも左右，または，上下に 1 ステップずれるから，矢印とドットは整合的である．

167 証明の概略：

- 良性ブロックを取り除いてから矢印と逆向きにずらす操作を行なっても，ドミノは重なり合わないことを示せ (やさしい．重なる可能性のある 2 つの場合をチェックすればよい)．
- ずらしてできた配置は，サイズが 1 だけ小さいアステカダイヤモンドに含まれていることを示せ (やさしい．境界線近くのドミノがどう動くかを見ればよい)．
- 小さいアステカダイヤモンドに生じた空所は 2×2 の正方形に分割され，悪性ブロックで埋めることができることを示せ．

168 可逆性より，すべてのドミノタイル貼りはシャッフリングによって得られる．サイズ m のアステカダイヤモンドはサイズ $m-1$ のものより $4m$ 個多くの (境界にある) 正方形を含んでいる．したがって，b 個の悪性ブロックが取り除かれたとすると，サイズ $m-1$ から m へのシャッフリングの際に $b+m$ 個の良性ブロックが追加され

る．悪性ブロックの向き付けの仕方は 2^b 通りあり，良性ブロックの向き付けは 2^{b+m} 通りあるから，その比は 2^m で b には依存しない．したがって，サイズ $m-1$ のアステカダイヤモンドのタイル貼りが $2^{\frac{-m(m-1)}{2}}$ の一様な確率で生成されるとすれば，サイズ m のアステカダイヤモンドのどのタイル貼りも，確率

$$2^{\frac{-m(m-1)}{2}} \cdot 2^{-m} = 2^{\frac{-m(m+1)}{2}}$$

で得られる．

訳者あとがき

本書は George E. Andrews, Kimmo Eriksson の "Integer Partitions" (Cambridge University Press, 2004) の翻訳です．脚注はすべて訳者によるものです．また，付録 B のリストにある参考文献のうち翻訳されているものは極めて少数なので，日本語で読める文献について訳者付記として補足しました．さて，著者の Andrews 氏はアメリカのペンシルヴァニア州立大学に所属する数学者で，本書の主題である整数の分割の研究の大御所的存在です．本書の中で著者たちは，R. Stanley "Enumerative Combinatorics" を「現代の古典」とよんでいますが，Andrews 氏の著書 "Theory of Partitions" もこの分野で現代の古典とよぶにふさわしいものです．共著者の Eriksson 氏はスウェーデンのメーラルダーレン大学の応用数学の教授で，専門の研究 (その一端は第 9 章で触れられています) の外にも，啓蒙書の執筆，はてはオペラの台本まで書くという多芸の数学者です．この 2 人の組合せは，質の高い内容を楽しく読める形で本にするという仕事に最適であったようです．

訳者は，ある種の合同式を p 進体上の群論的構造との関連で研究している際に，ガウス多項式や第 7, 8 章に登場するような恒等式に出会い，整数の分割に興味を持つようになりました．本書に「分割の理論は，さまざまな組合せ論的，代数的な問題に不思議な形で現れる」(p. 159) と書かれているとおりの経験です．

序文で著者も述べていますが，不思議なことにこれまで分割の理論の入門書はありませんでした．それは，微積分や線型代数などのように汎用性の高い理論を学ぶことにならない (と思われていた) からだと想像します．しかし，整数論，群の表現論，数理物理学など異なる分野の多くの問題が突き詰めてみれば，分割という極めて素朴な概念に帰着することが発見されて来ているので，整数の分割の知識の重要性はとても高まっています．入門書が必要となる所以です．

本書を読むのに，予備知識はほとんど要りません．数列の和を表す $\sum$ 記号に慣れているだけでよいでしょう．後半には無限級数・無限積が登場しますが，付録 A に解説がありますし，本文中では高校で習う無限等比級数の和の公式まで復習しているほどです．それにもかかわらず，展開されている数学は決して当たり前のことではなく，じつに興味深い内容があります．

本書のもう 1 つの特徴は，結果の紹介だけでなく，結果を得る過程の紹介にもページが割かれ，いわば数学の研究の仕方を学べることです．本書をじっくり読むことで，数値例から新しい法則を予想する，証明法を見出すための試行錯誤，既知の結果を一般化や精密化する際の目のつけ方等々，生きた数学を知ることができるでしょう．

これほど少ない予備知識でこれほど深い数学が楽しめる話題もあまりありません．この訳書で，読者とぜひその楽しさを分かち合いたいと思っています．

本書の翻訳に当たってお世話になった方々に心から感謝します．落合啓之，小木曽岳義，杉山和成の 3 氏には多くを負っていますので，特に記してお礼を申し上げたいと思います．

2006 年 1 月 訳者

索引

著　者
ジョージ・アンドリュース (George E.Andrews)
ペンシルヴァニア州立大学教授

キムモ・エリクソン (Kimmo Eriksson)
メーラルダーレン大学 (スウェーデン) 教授

訳　者
佐藤 文広 (さとう・ふみひろ)

略歴
1973年　東京大学理学部数学科卒業.
現　在　立教大学理学部教授.

主な著書に
『数学ビギナーズマニュアル』(日本評論社)

整数(せいすう)の分割(ぶんかつ)

2006 年 5 月 31 日　第 1 版第 1 刷発行

著　者　G. アンドリュース, K. エリクソン
訳　者　佐　藤　文　広
発行者　横　山　　伸
発　行　有限会社 数　学　書　房
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町 1-32 南部ビル
TEL & FAX　03-5281-1777
振替口座　00100-0-372475
発　売　株式会社 白　揚　社
〒101-0062 東京都千代田区神田駿河台 1-7
TEL　03-5281-9772
振替口座　00130-1-25400
印刷・製本　株式会社 シナノ
組　版　永石晶子
装　幀　岩崎寿文

ISBN 4-8269-3103-4